Recollement, modules de Cohen-Macaulay et modules inclinants

par

Mamadou Sène

Thèse présentée au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de philosophiae doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, février 2019

Date : Le 5 février 2019

Le jury a accepté la thèse de Monsieur Mamadou Sène dans sa version finale.

Membres du jury :

Directeur de recherche : Professeur Thomas Brustle
Département Mathématiques

Codirecteur de recherche : David Smith
Département Mathématiques(Université Bishop's)

Membre interne : Professeur Shiping Liu
Département Mathematiques

Membre externe : Charles Paquette (Professeur assistant)
Département Mathematiques, Collége militaire royal du Canada(Kingston)

Président-rapporteur : Professeur Ibrahim Assem
Département Mathématiques

CITATIONS

Fais-moi profiter tout ce que j'espère dans mes recherches. Rends-moi généreux avec désintéressement.(Cheikh Ahmadou Bamba)

Si j'ai pu voir plus loin que les autres c'est parce que je me suis appuyé sur les épaules des géants.(Isaac Newton)

La sagesse voudrait qu'on ait des rêves suffisamment grands, pour ne pas les perdre de vue lorsqu'on les poursuit.(Oscar Wilde)

Patience et longueur de temps font plus que force ni que rage.(Jean de La Fontaine)

Le savoir émane souvent des origines les plus humbles.(Inconnu)

Le génie n'est rien d'autre que la recherche du simple dans ce qui est compliqué.(Inconnu)

Plus j'acquiers des connaissances, plus je me rends compte de l'immensité de mon ignorance.(Inconnu)

Lorsque Dieu te fait passer par un circuit particulier c'est parce qu'il te réserve un destin particulier.(Inconnu)

DÉDICACES

Je dédie cette thèse à mes défunts parents ainsi qu'à ma famille plus particulièrement ma mère qui a tout récemment été rappelée à Dieu et je sais qu'elle aurait adoré feuilleter ce manuscrit. Saches que maman, tu resteras à jamais dans nos coeurs et nos pensées, repose en paix. Je la dédie également à mes amis, proches et tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin. Je vous en suis éternellement reconnaissant.

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE

D'un bout à l'autre de ce document le terme recollement revient comme un leitmotiv, en effet c'est le sujet essentiel sur lequel portent nos recherches. Cette thèse est répartie en cinq sections. Dans les trois premiers chapitres nous présentons succinctement quelques notions d'algèbre non commutative et de théorie d'Auslander-Reiten indispensables pour une bonne compréhension de cette thèse. Toutefois, nous supposons que le lecteur est plus ou moins outillé afin de pouvoir suivre le fil des idées.

Dans les deux derniers chapitres, nous avons établi les résultats de nos recherches, entre autres, le recollement sur les modules de Cohen-Macaulay, la préservation de l'inclinaison et les paires de torsion dans le contexte où A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et e est un idempotent de A. Si AeA est un idéal source tel que $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$ alors nous avons le recollement suivant sur les catégories de modules de Cohen-Macaulay.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CM}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{CM}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{CM}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

Celui-ci est la restriction du recollement sur les catégories de modules défini par Cline, Parshall et Scott [22]. Dans le chapitre V, nous parlons de la préservation de l'inclinaison

sous certaines hypothèses par les six foncteurs qui composent le diagramme ci-bas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{modA}/<\mathrm{e}> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{modA} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{modeAe}. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

En dernier lieu, nous considérons les classes de modules suivantes dans la catégorie de modules sur A :

$\mathcal{T}_1 = \{\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$

$\mathcal{T}_2 = \{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M}) \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$

Dans ce qui suit nous montrons l'existence des paires de torsion suivantes sur les catégories de modules.

1. Si A/<e> est un A^{op}-module projectif (ou eA un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif) alors $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ est une paire de torsion.
2. Si A/<e> est un A-module projectif alors $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ est une paire de torsion.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mes directeur et codirecteur de thèse pour leur aide et appui financier tout au long de ma thèse. Leur soutien financier et celui du département de mathématiques m'ont été d'un grand apport. Je salue également leur générosité et leur compréhension sans oublier les discussions fructueuses que nous avons eues lors de nos rencontres hebdomadaires.

En effet, ces discussions m'ont beaucoup aidé et permis d'élargir mon champ de vision. J'apprécie énormément l'esprit critique de David, surtout son éveil et son sens méticuleux des choses. De même que Thomas dont la réactivité à certaines situations a été toujours bien appréciée. J'avoue que n'eût été lui, je n'aurais pas eu le courage et la persévérance d'abattre ce travail. Mille mercis cher directeur.

Je profite également de cette occasion pour remercier tous les enseignants qui ont participé à ma formation durant tout mon cursus scolaire-universitaire. Enfin mention spéciale à ceux du Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke. Je remercie notre ancienne secrétaire Marie-France sans oublier Annie notre secrétaire actuelle, pour leur amabilité, leur disponibilité et leur serviabilité. Je remercie aussi mon collègue de travail Ndongo pour les discussions intéressantes qu'on a eues à partager.

Enfin, je remercie ma mère que j'ai perdue tout récemment pour ses conseils avisés et son soutien indéfectible. Elle a toujours cru en moi, elle me disait souvent, tiens bon et sois patient mon fils. En effet, Dieu est avec les patients. Et sans nul doute, aucun chercheur n'ignore que la recherche exige plusieurs qualités pour ne citer que la patience, la persévérance, l'abnégation, le courage, la détermination, la ténacité et j'en passe. Pour finir, je remercie l'ensemble de ma famille, mes amis, les proches et parents. Je vous suis reconnaissant pour tout ce que vous aviez fait pour moi. Je vous le revaudrai.

Mamadou Sène

Sherbrooke, 2019

INTRODUCTION

Dans cette thèse nous traitons principalement du recollement au niveau des modules de Cohen-Macaulay, de la préservation de l'inclinaison et des paires de torsion. Rappelons que le concept de recollement a été pour la première fois défini par Grothendieck [3] dans ses travaux. Celui-ci appelait ce concept diagramme des six foncteurs. C'est par la suite que Beilinson, Bernstein et Deligne l'ont redéfini en adoptant le concept de «recollement» dans leur ouvrage intitulé «faisceaux pervers» [11]. En résumé, un recollement n'est rien d'autre qu'un diagramme composé de six foncteurs satisfaisant à certaines propriétés. C'est en 1988 que Cline, Parshall et Scott [22] les ont appliqués en théorie des représentations. Pour ce faire, ils ont montré que pour toute K-algèbre A de dimension finie et e un idempotent de A, il existe toujours ce recollement sur les catégories de modules :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{modA}/<\mathrm{e}> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{modA} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{modeAe}. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

Autrement dit les couples $(-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-))$;
$(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-), \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-))$; $(-\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>), \mathsf{inc})$ et $(\mathsf{inc}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-))$ sont des paires de foncteurs adjoints. Les foncteurs inc, $-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)$ sont respectivement pleins et fidèles et $\mathrm{Im}(\mathsf{inc}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-))$. Depuis lors, des résultats intéressants ont été trouvés, (voir [56], [55], [29]) et ne cessent de s'accroître vu l'intérêt grandissant que la notion de recollement suscite dans le milieu scientifique. C'est cette

raison qui nous motive profondément à orienter nos recherches dans cette direction. Après un bref survol sur l'historique des recollements, nous allons à présent donner le squelette de notre thèse. Cette dernière est composée de cinq parties.

Dans le **chapitre** I, nous présumons que le lecteur est assez familier avec les notions élémentaires d'algèbre non commutative indispensables dont nous avons besoin tout au long du document. Bref nous y énonçons des résultats connus et quelques rappels nécessaires pour une bonne compréhension de la thèse. Puisque nous travaillons dans le domaine de la théorie des représentations, nous avons jugé important de présenter au **chapitre** II les notions de carquois, d'algèbres de chemins, d'algèbres de carquois liés et quelques propriétés annexes. Toutes les définitions, propriétés et théorèmes sont entièrement tirés de l'ouvrage [5] à quelques exceptions près. Il va sans dire que nous ne pouvons parler de la théorie des représentations en ignorant la théorie d'Auslander-Reiten. Le **chapitre** III est entièrement réservé à cette théorie, nous y présentons toutes les propriétés dont le seul but est la construction d'un carquois un peu spécial dénommé **carquois d'Auslander-Reiten.** Puisque la construction de ce dernier n'est pas simple nous en donnerons seulement l'idée générale.

Enfin, les **deux derniers chapitres** constituent l'épine dorsale de cette thèse. Dans ces deux parties, tous les résultats sont exposés, commentés et détaillés. Dans le **chapitre** IV, nous présentons le résultat principal, en l'occurrence le recollement sur les modules de Cohen-Macaulay qui représente la restriction du recollement de Cline, Parshall et Scott aux catégories de modules de Cohen-Macaulay.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CM}(A/<e>) \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{CM}(A) \arrow[l, bend right, "-\otimes_A A/<e>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_A(A/<e>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(eA,-)"] & \mathrm{CM}(eAe). \arrow[l, bend right, "-\otimes_{eAe} eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"]
\end{tikzcd}$$

Dans le **dernier chapitre** nous nous sommes intéressés aux modules inclinants et aux paires de torsion. Puisque le recollement de Cline, Parshall et Scott [22] est la pièce maîtresse de nos recherches, nous nous sommes penchés sur la préservation de l'inclinaison par les six foncteurs de ce diagramme. Dans un premier temps, nous avons vérifié la préservation à travers des exemples qui prouvent effectivement qu'elle n'est pas toujours garantie. En dernier lieu, nous avons établi les hypothèses sous lesquelles la préservation de l'inclinaison est obtenue de façon totale ou partielle. Toutefois, nous pouvons affirmer qu'elle n'est jamais respectée par certains foncteurs pour la simple raison que les algèbres **eAe** et **A**/<**e**> sont obtenues à partir de **A** et inférieures en terme de rangs de groupes de Grothehdieck. Par conséquent, la troisième propriété de l'inclinaison n'est pas satisfaite. Considérons les classes de modules suivantes sur les catégories de modules :
$\mathcal{T}_1 = \{\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$; $\mathcal{F}_1 = \{\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$
$\mathcal{T}_2 = \{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{M}) \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$; $\mathcal{F}_2 = \{\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$.
Nous avons montré sous certaines hypothèses que $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ sont des paires de torsion sur les catégories de modules. Avec cette méthode, nous pouvons dorénavant trouver plus facilement des paires de torsion dans la pratique.

CHAPITRE 1

Rappels de quelques notions d'algèbre non commutative

1.1 Quelques notions d'algèbre homologique

Dans ce chapitre nous allons passer en revue quelques notions sur les algèbres artiniennes, les modules, les catégories dérivées et triangulées nécessaires à la compréhension de cette thèse. Toutefois, nous présumerons que le lecteur est quelque peu familier avec certaines notions de la théorie des modules. C'est la raison pour laquelle nous jugeons opportun de ne pas définir certaines notions. Pour un novice, nous lui conseillerions de se référer à [4] pour mieux percevoir les notions de base. Soit A une K-algèbre artinienne où K est un corps. D'un bout à l'autre, sauf mention expresse du contraire, nous travaillerons avec des K-algèbres de dimension finie. En effet, il est connu que toute K-algèbre de dimension finie est à la fois artinienne et noethérienne.

Nous notons **Mod(A)** la catégorie des A-modules à droite et **mod(A)** la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod(A)}$ composée des A-modules à droite de type fini. Rappelons que les catégories de modules sont abéliennes. Étant donné que nous travaillons conjointement avec les foncteurs d'extension et de produit tensoriel, nous utiliserons à la fois des A-modules à droite et à gauche. On note $\mathbf{A^{op}}$ l'algèbre opposée de $\mathbf{A}$. La donnée d'un A-module à gauche revient à la donnée d'un $\mathrm{A^{op}}$-module. Ainsi pour faire simple tout module utilisé le long de ce document peut être vu comme un module à droite. Finalement nous notons $\mathbf{D}$ la dualité standard de $\mathbf{mod(A)}$ vers $\mathbf{mod}(\mathbf{A^{op}})$. Cette dualité est le foncteur $\mathbf{D} = \mathbf{Hom_K}(-, \mathbf{K})$.

1.1.1 Propriétés homologiques

Dans cette sous-section nous introduisons les propriétés homologiques. Dans un premier temps nous définissons les modules projectifs et injectifs.

Définition 1.1.1.

1. Un A-module P est dit **projectif** si le foncteur $\mathrm{Hom_A(P, -)}$ est exact.
2. Dualement, un A-module I est dit **injectif** si le foncteur $\mathrm{Hom_A(-, I)}$ est exact.

Définition 1.1.2.

1. Une catégorie $\mathcal{C}$ admet **suffisamment d'objets projectifs**, si pour tout objet X dans $\mathcal{C}$, il existe un objet projectif P dans $\mathcal{C}$ et un épimorphisme $\mathrm{P} \to \mathrm{X}$.
2. Une catégorie $\mathcal{C}$ admet **suffisamment d'objets injectifs**, si pour tout objet Y dans $\mathcal{C}$, il existe un objet injectif I dans $\mathcal{C}$ et un monomorphisme $\mathrm{Y} \to \mathrm{I}$.

Définition 1.1.3. Une sous-catégorie pleine $\mathcal{I}$ d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie de **Serre** si pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{A}$, alors F, H appartiennent à $\mathcal{I}$ si et seulement si G apparient à $\mathcal{I}$.

Soit M un A-module. Les foncteurs $\mathbf{Ext}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M},-)$ et $\mathbf{Tor}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{i}}(\mathbf{M},-)$ pour tout $i \geq 1$ sont définis comme foncteurs dérivés de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M},-)$ et $\mathbf{M} \otimes_{\mathrm{A}} -$ respectivement. Ainsi que les foncteurs $\mathbf{Ext}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{A}}(-,\mathbf{N})$ et $\mathbf{Tor}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{i}}(-,\mathbf{N})$ lorsque N est un A-module (respectivement un A^{op}-module). Les foncteurs d'extension et de produit tensoriel interviendront beaucoup dans nos résultats. Les résultats qui suivent seront d'une importance capitale dans les chapitres IV et V.

Proposition 1.1.4 ([4]). Soient A une K-algèbre et

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A-modules. Pour tout A-module X_{A} le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},-)$ induit une suite exacte longue de K-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{L}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{M}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{N}) \arrow[dll, "\alpha^0"] \\
& \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{L}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{M}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{N}) \arrow[dll, "\alpha^1"] \\
& \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{L}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{M}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{N}) \arrow[dll, dashed] \\
& \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{L}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{M}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{N}) \to \cdots
\end{tikzcd}$$

De même, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(-,\mathrm{X})$ induit une suite exacte longue de K-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N},\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L},\mathrm{X}) \arrow[dll, "\beta^0"] \\
& \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{N},\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{L},\mathrm{X}) \arrow[dll, "\beta^1"] \\
& \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{N},\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{L},\mathrm{X}) \arrow[dll, dashed] \\
& \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{N},\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{X}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{L},\mathrm{X}) \to \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.1.5 ([4]). Soient A une K-algèbre et

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A^{op}-modules. Pour tout A-module $\mathrm{X_A}$ le foncteur $\mathrm{X} \otimes_{\mathrm{A}} -$ induit une suite exacte longue de K-modules.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i+1}^{A}(X,L) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i+1}^{A}(X,M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i+1}^{A}(X,N) \arrow[dll, "\phi^0"] \\
 & \mathrm{Tor}_{i}^{A}(X,L) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i}^{A}(X,M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i}^{A}(X,N) \arrow[dll, "\phi^1"] \\
 & \mathrm{Tor}_{i-1}^{A}(X,L) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i-1}^{A}(X,M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i-1}^{A}(X,N) \arrow[dll, dashed] \\
 & X \otimes_A L \arrow[r] & X \otimes_A M \arrow[r] & X \otimes_A N \to 0
\end{tikzcd}$$

De même, pour tout A^{op}-module ${}_{\mathrm{A}}\mathrm{Y}$ le foncteur $- \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{Y}$ induit une suite exacte longue de K-modules.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i+1}^{A}(L,Y) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i+1}^{A}(M,Y) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i+1}^{A}(N,Y) \arrow[dll, "\psi^0"] \\
 & \mathrm{Tor}_{i}^{A}(L,Y) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i}^{A}(M,Y) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i}^{A}(N,Y) \arrow[dll, "\psi^1"] \\
 & \mathrm{Tor}_{i-1}^{A}(L,Y) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i-1}^{A}(M,Y) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i-1}^{A}(N,Y) \arrow[dll, dashed] \\
 & L \otimes_A Y \arrow[r] & M \otimes_A Y \arrow[r] & N \otimes_A Y \to 0
\end{tikzcd}$$

Définition 1.1.6. Soit M un A-module. La **dimension projective dp(M)** de M est le plus petit entier **d** tel qu'il existe une suite exacte avec les $\mathrm{P_i}$ projectifs de la forme

$$0 \to \mathrm{P_d} \to \mathrm{P_{d-1}} \to \cdots \to \mathrm{P_1} \to \mathrm{P_0} \to \mathrm{M} \to 0.$$

Si une telle résolution n'existe pas, alors on dit que M a une dimension projective infinie. Dualement la **dimension injective di(M)** de M est le plus petit entier **d** tel qu'il existe une suite exacte avec les $\mathrm{I_i}$ injectifsde la forme $0 \to \mathrm{M} \to \mathrm{I_0} \to \mathrm{I_1} \to \cdots \to \mathrm{I_{d-1}} \to \mathrm{I_d} \to 0$. Si une telle résolution n'existe pas, on dit que M admet une dimension injective infinie.

Définition 1.1.7. La **dimension globale dgl(A)** d'une K-algèbre A est définie comme étant le suprémum des dimensions projectives (ou bien injectives) de tous les A-modules

$$\mathbf{dgl}(\mathbf{A}) = \mathbf{sup}\{\mathbf{dp}(\mathbf{M}) \mid \mathbf{M} \in \mathbf{Mod}(\mathbf{A})\}(= \mathbf{sup}\{\mathbf{di}(\mathbf{M}) \mid \mathbf{M} \in \mathbf{Mod}(\mathbf{A})\}).$$

Si A est une K-algèbre artinienne alors la dimension globale est aussi égale au suprémum des dimensions projectives de tous les A-modules simples

$$\mathbf{dgl}(\mathbf{A}) = \mathbf{sup}\{\mathbf{dp}(\mathbf{S}) \mid \mathbf{S} \in \mathbf{Mod}(\mathbf{A}),\ \mathrm{S\ simple}\}.$$

Remarque 1.1.8. Un A-module L est **projectif** si et seulement si $\mathrm{dp(L)} = 0$.
Dualement un A-module M est **injectif** si et seulement si $\mathrm{di(M)} = 0$.
Une K-algèbre A est dite **héréditaire** si $\mathrm{dgl(A)} \leq 1$.

Proposition 1.1.9 ([4])**.** Soit

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A-modules. Nous avons les inégalités suivantes :

1. $\mathrm{dp(L)} \leq \sup\{\mathrm{dp(M)}, \mathrm{dp(N)} - 1\}$ et l'égalité a lieu si $\mathrm{dp(M)} \neq \mathrm{dp(N)}$
2. $\mathrm{dp(M)} \leq \sup\{\mathrm{dp(L)}, \mathrm{dp(N)}\}$ et l'égalité a lieu si $\mathrm{dp(N)} \neq \mathrm{dp(L)} + 1$
3. $\mathrm{dp(N)} \leq \sup\{\mathrm{dp(M)}, \mathrm{dp(L)} + 1\}$ et l'égalité a lieu si $\mathrm{dp(M)} \neq \mathrm{dp(L)}$

Theorème 1.1.10 ([4] **Adjonction**)**.** Soient A, B deux K-algèbres et $\mathrm{L_A}, {}_\mathrm{A}\mathrm{M_B}, \mathrm{N_B}$ des modules. Il existe un isomorphisme de K-modules

$$\mathrm{Hom_A(L, Hom_B(M, N))} \simeq \mathrm{Hom_B(L \otimes_A M, N)}$$

fonctoriel en chaque variable. Ainsi, $- \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M}$ est un adjoint à gauche de $\mathrm{Hom_B(M, -)}$.

Lemme 1.1.11 ([4]). Soient $\Phi : A \to B$ un morphisme de K-algèbres et M, N deux B-modules. On définit un foncteur, $F : \text{ModB} \to \text{ModA}$ comme suit : à tout B-module M, on associe un A-module FM ayant la même structure de K-module que M, mais où la multiplication par les éléments de A est définie par

$$\mathrm{xa} = \mathrm{x}\Phi(\mathrm{a})$$

(pour $x \in M$, $a \in A$). Ce foncteur est parfois appelé, foncteur de changement des scalaires. Si $f : M \to N$ est B-linéaire alors f est aussi A-linéaire. Si f est surjectif, le foncteur de changement de scalaires induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M, N).$$

Proposition 1.1.12 ([4]). Soient $\phi : A \to B$ un morphisme de K-algèbres et M_B un B-module (que l'on peut voir comme un A-module au moyen de ϕ). Alors l'inégalité suivante est vérifiée

$$\mathrm{dp}(M_A) \leq \mathrm{dp}(B_A) + \mathrm{dp}(M_B).$$

Dans la section suivante, nous introduisons une notion importante appelée **catégorie triangulée**.

1.2 La définition de la catégorie triangulée

Dans cette section nous listons quelques définitions concernant la catégorie triangulée.

Définition 1.2.1. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie additive. Soit $[n] : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $E \mapsto E[n]$ une collection de foncteurs additifs indexée par $n \in \mathbb{Z}$ telle que $[n] \circ [m] = [n+m]$ et $[0] = \mathrm{id}$ (égalité comme foncteurs). Dans cette situation nous définissons un **triangle** comme un sextuplet (X, Y, Z, f, g, h) où $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to X[1]$

sont des morphismes de $\mathcal{D}$. Un **morphisme de triangles**

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}) \to (\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}', \mathrm{f}', \mathrm{g}', \mathrm{h}')$$

est donné par des morphismes $\mathrm{a} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$, $\mathrm{b} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ et $\mathrm{c} : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}'$ de $\mathcal{D}$ tels que $\mathrm{b} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f}' \circ \mathrm{a}$, $\mathrm{c} \circ \mathrm{g} = \mathrm{g}' \circ \mathrm{b}$ et $\mathrm{a}[1] \circ \mathrm{h} = \mathrm{h}' \circ \mathrm{c}$.

Un morphisme de triangles peut être représenté par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"] & X[1] \arrow[d, "a[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

Définition 1.2.2. Une **catégorie triangulée** se compose d'un triplet $(\mathcal{D}, \{[n]\}_{\mathrm{n}\in\mathbb{Z}}, \mathcal{T})$ où

1. $\mathcal{D}$ est une catégorie additive,
2. $[\mathrm{n}] : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}[\mathrm{n}]$ est une collection de foncteurs additifs indexée par $\mathrm{n} \in \mathbb{Z}$ telle que $[\mathrm{n}]\circ[\mathrm{m}] = [\mathrm{n} + \mathrm{m}]$, $[1]$ est une auto-équivalence et $[0] = \mathrm{id}$ (égalité comme foncteurs),
3. $\mathcal{T}$ est un ensemble de triangles appelés les **triangles distingués**

satisfaisant aux conditions suivantes

- TR1 Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est un triangle distingué. Tout triangle de la forme $(\mathrm{X}, \mathrm{X}, 0, \mathrm{id}, 0, 0)$ est distingué. Pour tout morphisme $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ de $\mathcal{D}$, il existe un triangle distingué de la forme $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h})$.
- TR2 Le triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h})$ est distingué. si et seulement si le triangle $(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{X}[1], \mathrm{g}, \mathrm{h}, -\mathrm{f}[1])$ l'est aussi.
- TR3 Soit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "a[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des triangles distingués et les morphismes $a : X \to X'$, $b : Y \to Y'$ sont donnés et satisfont à $b \circ f = f' \circ a$". Alors il existe un morphisme $c : Z \to Z'$ tel que (a, b, c) soit un morphisme de triangles.

TR4 Soient X, Y, Z des objets de $\mathcal{D}$, des morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, des triangles distingués (X, Y, U, f, p_1, d_1), $(X, Z, V, g \circ f, p_2, d_2)$, et (Y, Z, W, g, p_3, d_3). Alors il existe des morphismes $a : U \to V$ et $b : V \to W$ tels que

(a) $(U, V, W, a, b, p_1[1] \circ d_3)$ soit un triangle distingué.

(b) Le triplet (id_X, g, a) soit un morphisme de triangles
$(X, Y, U, f, p_1, d_1) \to (X, Z, V, g \circ f, p_2, d_2)$, et

(c) Le triplet (f, id_Z, b) soit un morphisme de triangles
$(X, Z, V, g \circ f, p_2, d_2) \to (Y, Z, W, g, p_3, d_3)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[rr, bend left, "p_3"] \arrow[dr, "p_2"] & & W \arrow[rr, bend left, "T(p_1) \circ d_3"] \arrow[dr, "d_3"] & & T(U) \\
& Y \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "p_1"'] & & V \arrow[ur, "b"] \arrow[dr, "d_2"] & & T(Y) \arrow[ur, "T(p_1)"'] & \\
& & U \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, bend right, "d_1"'] & & T(X) \arrow[ur, "T(f)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il faut noter que $T(p_1) = p_1[1]$, $T(X) = X[1]$, $T(Y) = Y[1]$, $T(U) = U[1]$ et $T(f) = f[1]$.

Définition 1.2.3. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un foncteur additif $\mathbf{H} : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ est appelé **foncteur cohomologique covariant** si pour tout triangle distingué $X \to Y \to Z \to X[1]$, $\mathbf{H}$ induit une suite exacte longue
$\cdots \to H(X[i]) \to H(Y[i]) \to H(Z[i]) \to H(X[i+1]) \to \cdots$
Si $\mathbf{H}$ est un foncteur cohomologique on écrit $H^i(X) = H(X[i])$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

De même **H** est appelé un **foncteur cohomologique contravariant** s'il induit une suite exacte longue $\cdots \to \mathrm{H}(\mathrm{Z}[\mathrm{i}]) \to \mathrm{H}(\mathrm{Y}[\mathrm{i}]) \to \mathrm{H}(\mathrm{X}[\mathrm{i}]) \to \mathrm{H}(\mathrm{Z}[\mathrm{i}-1]) \to \cdots$

Exemple 1.2.4. Un exemple classique de catégorie triangulée est fourni par les **catégories dérivées** des catégories de modules que nous rappellerons brièvement dans la section suivante.

1.3 Catégories dérivées

Dans cette section nous allons introduire les catégories dérivées des catégories de modules qui permettront de mieux comprendre certaines propriétés du chapitre IV. Les catégories dérivées ont été introduites pour la première fois dans la thèse de Verdier [58]. Notre objectif n'est pas de donner la construction générale de ce type de catégories mais une idée. Une construction simple pourrait être trouvée dans [36]. Cependant, pour une compréhension profonde de cette notion le lecteur pourra se référer à [44] et [48].
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Il existe une injection évidente de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des complexes $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. En effet, tout objet X de $\mathcal{C}$ est envoyé vers le complexe concentré en degré **0** , $\cdots \to 0 \to \mathrm{X} \to 0 \to \cdots$.

1.3.1 Cohomologie

Soit $\mathbf{X} = \cdots \to \mathrm{X}^{\mathrm{n}-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{\mathrm{n}-1}} \mathrm{X}^{\mathrm{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}^{\mathrm{n}}} \mathrm{X}^{\mathrm{n}+1} \to \cdots$ un complexe dans $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Représentons par $\mathrm{i} : \mathrm{Ker}(\mathrm{d}^{\mathrm{n}}) \to \mathrm{X}^{\mathrm{n}}$ l'injection naturelle. D'après la propriété universelle de $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}^{\mathrm{n}})$ il existe un morphisme $\mathrm{a}^{\mathrm{n}-1} : \mathrm{X}^{\mathrm{n}-1} \to \mathrm{Ker}(\mathrm{d}^{\mathrm{n}})$ tel que $\mathrm{ia}^{\mathrm{n}-1} = \mathrm{d}^{\mathrm{n}-1}$. La nième cohomologie du complexe **X** est définie par cet objet $\mathrm{H}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X}) = \mathrm{Coker}(\mathrm{a}^{\mathrm{n}-1})$ dans $\mathcal{C}$. Un complexe **X** est exact en degré n si $\mathrm{H}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X}) = 0$ et **X** est exact si $\mathrm{H}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X}) = 0$ pour chaque $\mathrm{n} \in \mathbb{Z}$. Tout morphisme $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ dans $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ induit une application

$H^n(f) : H^n(X) \to H^n(Y)$. Par exemple dans Mod-A ces applications sont définies comme suit :

$$\begin{array}{cccc} H^n(f) : & H^n(X) & \to & H^n(Y) \\ & x + Im(d_X^{n-1}) & \mapsto & f(x) + Im(d_Y^{n-1}) \end{array}$$

Ainsi nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{Z}$ un foncteur de cohomologie $H^n : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec suffisamment d'objets projectifs (ou injectifs). Alors nous pouvons définir une application $\mathcal{C} \to C(\mathcal{C})$ en envoyant X vers une résolution projective (injective) de X. Une façon de voir les choses est que dans la catégorie dérivée bornée tout objet X serait identifié à toutes ses résolutions projectives et injectives.

Soit X un objet dans $\mathcal{C}$ et $\mathbf{P}^*$ une résolution projective de X avec l'application augmentation $\varepsilon : P^0 \to X$. Alors ε donne lieu à un morphisme de complexe (qui est aussi représenté par ε).

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

En termes de degré ces deux complexes sont différents, cependant leur cohomologie est nulle en degrés n où $n \neq 0$ et par conséquent l'application induite $H^n(\varepsilon)$ est une application nulle pour $n \neq 0$. En degré 0, ε induit un isomorphisme

$$H^0(\varepsilon) : \underbrace{H^0(\mathbf{P}^*)}_{\mathrm{Coker}(d^{-1})} \to \underbrace{H^0(X)}_{X}$$

Cette observation conduit à la définition suivante qui est fondamentale pour la construction des catégories dérivées.

Définition 1.3.1. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Alors f est appelé un **quasi-isomorphisme** si f induit des isomorphismes en cohomologie c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(f) : H^n(X) \to H^n(Y)$ est un isomorphisme.

Définition 1.3.2. Un complexe $\mathrm{C} = (\mathrm{C_i}, \mathrm{d_i})$ est dit **acyclique** si $\mathrm{H^n(C)} = 0$ pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{C_i}$ un objet de $\mathcal{C}$.

Puisque la construction des catégories dérivées est très complexe, nous avons jugé nécessaire de donner une présentation simple de ce concept. Par conséquent, nous ne définirons pas les notions de système multiplicatif et de localisation de catégorie. Pour une explication détaillée de ces concepts le lecteur pourra se référer à [44] et [46].

1.3.2 Définition des catégories dérivées

Soit X un objet de **C**, on voudrait que les quasi-isomorphismes soient inversibles afin d'identifier X à toutes ses résolutions. Ainsi, on localisera la catégorie des complexes **C** par rapport à la classe de quasi-isomorphismes. Notons $\mathcal{N}$ la sous catégorie pleine de **C** dont les éléments sont les complexes isomorphes aux complexes acycliques. Les morphismes $\bar{\mathrm{s}}$ de **C** apparaissant dans les triangles $\mathrm{N} \to \mathrm{X} \xrightarrow{\bar{\mathrm{s}}} \mathrm{X}' \to \mathrm{N}[1]$ avec N appartenant à $\mathcal{N}$ sont des quasi-isomorphismes. Par définition, le système multiplicatif S associé à $\mathcal{N}$ est formé de tous les quasi-isomorphismes.

Proposition 1.3.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Il existe une catégorie $\mathbf{D}(\mathcal{C}) = \mathbf{C}(\mathcal{C})/\mathcal{N} = \mathbf{C}[\mathrm{S}^{-1}]$ et un foncteur $\mathrm{L} : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \to \mathbf{D}(\mathcal{C})$ tels que*

1. Pour tout quasi-isomorphisme f dans $\mathbf{C}(\mathcal{C})$, $\mathrm{L(f)}$ est un isomorphisme dans $\mathbf{D}(\mathcal{C})$.
2. Tout foncteur $\mathrm{F} : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \to \mathbf{D}(\mathcal{C})$ qui transforme les quasi-isomorphismes en isomorphismes se factorise uniquement par $\mathrm{L} : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \to \mathbf{D}(\mathcal{C})$

Définition 1.3.4. $\mathscr{D}(\mathcal{C})$ est appelée la **catégorie dérivée** de la catégorie abélienne $\mathcal{C}$.

Définition 1.3.5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Nous définissons les sous-catégories $\mathscr{D}^+(\mathcal{C})$, $\mathscr{D}^-(\mathcal{C})$ et $\mathscr{D}^\mathrm{b}(\mathcal{C})$ de $\mathscr{D}(\mathcal{C})$ dont les ensembles d'objets sont

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{D}^-(\mathcal{C})) = \{\mathrm{X} \in \mathscr{D}(\mathcal{C}) \mid \mathrm{H^n(X)} = 0 \ \ \forall \ \ \mathrm{n} \gg 0\}$$

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{D}^+(\mathcal{C})) = \{X \in \mathscr{D}(\mathcal{C}) \mid H^n(X) = 0 \ \ \forall \ \ n \ll 0\}$$

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{D}^b(\mathcal{C})) = \{X \in \mathscr{D}(\mathcal{C}) \mid H^n(X) = 0 \ \ \forall \ \ \mid n \mid \gg 0\}\,.$$

— $\mathscr{D}^-(\mathcal{C})$ est la catégorie dérivée bornée supérieurement de $\mathcal{C}$.

— $\mathscr{D}^+(\mathcal{C})$ est la catégorie dérivée bornée inférieurement de $\mathcal{C}$.

— $\mathscr{D}^b(\mathcal{C})$ est la catégorie dérivée bornée de $\mathcal{C}$.

1.4 Foncteurs dérivés

Dans cette section, nous allons introduire les notions de foncteurs dérivés à droite et à gauche. En fait, cette présentation est motivée par le fait que ces foncteurs sont utilisés au chapitre IV. Pour une compréhension profonde de ces concepts le lecteur pourra se référer à [31], [53], [49], [28] et [34].

Définition 1.4.1 ([45])**.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Pour les complexes $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ dans $\mathcal{C}$ avec $\mathbf{Y}$ borné inférieurement (c'est à dire il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $Y_k = 0$ pour tout $k < n$), on définit $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ comme étant le complexe de groupes abéliens avec $\mathrm{Hom}^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ le groupe des morphismes $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}$ de degré n avec la différentielle $\phi \mapsto d_Y \circ \phi - (-1)^r \phi \circ d_X$, $r \in \mathbb{Z}$. De cette manière, nous obtenons un bifoncteur

$$\mathbf{Hom} : \mathbf{C}(\mathcal{C})^{\mathbf{opp}} \times \mathbf{C}(\mathcal{C}) \mapsto \mathbf{C}(\mathbf{Ab}),$$

où $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ représente la catégorie des complexes. Si $\mathcal{C}$ admet suffisamment d'objets injectifs ceci induit un bifoncteur

$$\mathrm{RHom} : \mathscr{D}(\mathcal{C})^{\mathrm{opp}} \times \mathscr{D}(\mathcal{C}) \mapsto \mathscr{D}(\mathrm{Ab}).$$

De plus,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{C})}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \simeq H^0(\mathrm{RHom}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})).$$

Cela suggère de définir,

$$\mathrm{Ext}^{n}_{\mathscr{D}(\mathcal{C})}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathrm{H}^{n}(\mathrm{RHom}(\mathbf{X},\mathbf{Y})) \simeq \mathrm{H}^{0}(\mathrm{RHom}(\mathbf{X},\mathbf{Y}[\mathbf{n}])) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}(\mathcal{C})}(\mathbf{X},\mathbf{Y}[\mathbf{n}]).$$

Lorsque $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

$$\mathrm{Ext^{n}}_{\mathscr{D}(\mathcal{C})}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \simeq \mathrm{Ext^{n}}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X},\mathbf{Y}).$$

Définition 1.4.2 ([45])**.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec une structure de produit tensoriel. Pour les complexes $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ bornés supérieurement (c'est à dire il existe $\mathrm{n} \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{X_k} = 0$ et $\mathrm{Y_k} = 0$ pour tout $\mathrm{k} > \mathrm{n}$) dans $\mathcal{C}$, définissons $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ comme étant le complexe avec

$$(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y})^{\mathbf{n}} = \bigoplus_{\mathbf{p+q=n}} \mathbf{X^{p}} \otimes \mathbf{Y^{q}}$$

et avec la différentielle

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{d} & : & (\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y})^{\mathbf{n}} & \to & (\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y})^{\mathbf{n+1}} \\ & & \mathrm{x} \otimes \mathrm{y} & \mapsto & \mathrm{d}(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}) \end{array}$$

où $\mathrm{d} = \mathrm{d_X} \otimes 1_{\mathrm{Y}} + (-1)^{\deg(\mathrm{x})} 1_{\mathrm{X}} \otimes \mathrm{d_Y}$ et $\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}$ est un tenseur simple dans une composante homogène de $(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y})^{\mathbf{n}}$. Ainsi nous obtenons $\mathrm{d}(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}) = \mathrm{d_X}(\mathrm{x}) \otimes \mathrm{y} + (-1)^{\deg(\mathrm{x})} \mathrm{x} \otimes \mathrm{d_Y}(\mathrm{y})$. Si $\mathcal{C}$ admet suffisamment d'objets plats, alors le bifoncteur

$$\otimes : \mathbf{K}^{-}(\mathcal{C}) \times \mathbf{K}^{-}(\mathcal{C}) \mapsto \mathbf{K}^{-}(\mathcal{C})$$

induit le foncteur

$$\otimes^{\mathbf{L}} : \mathscr{D}^{-}(\mathcal{C}) \times \mathscr{D}^{-}(\mathcal{C}) \mapsto \mathscr{D}^{-}(\mathcal{C}).$$

où $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ désigne la catégorie homotopique (c'est à dire la catégorie dont les objets sont des complexes et les morphismes sont les classes d'équivalence d'homotopie de complexes). Pour le calculer, sur une paire de complexes $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ nous choisissons un quasi-isomorphisme $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{X}$ (ou $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{Y}$) avec $\mathbf{P}$ un complexe d'objets plats borné supérieurement et alors,

$$\mathbf{X} \otimes^{\mathrm{L}} \mathbf{Y} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{Y} (\text{ou} \quad \mathbf{X} \otimes \mathbf{P}, \text{respectivement}).$$

CHAPITRE 2

Algèbres de carquois et propriétés

Dans ce chapitre nous allons présenter une classe d'algèbres construite à partir d'une notion appelée **carquois**. Il faut noter que ces algèbres ne sont pas nécessairement artiniennes. Toutefois, nous travaillerons avec des K-algèbres de dimension finie dans tous nos exemples.

2.1 Algèbres de chemins

Le but principal de cette section est de construire un type d'algèbre (pas nécessairement artinienne) à partir de la notion de carquois.

Définition 2.1.1. Un **carquois** $(\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \mathrm{s}, \mathrm{t})$ se compose de
Q_0 un ensemble de sommets, Q_1 un ensemble de flèches, $\mathrm{s} : \mathrm{Q}_1 \to \mathrm{Q}_0$ et $\mathrm{t} : \mathrm{Q}_1 \to \mathrm{Q}_0$ deux applications. Pour une flèche $\alpha \in \mathrm{Q}_1$ on a $\mathrm{s}(\alpha)$ qui représente la source et $\mathrm{t}(\alpha)$ le but. On dit que Q est fini si les ensembles Q_0 et Q_1 sont finis.

Remarque 2.1.2. Il faut noter qu'un carquois peut comporter des boucles et des flèches multiples. Dans ce qui suit, on omettra souvent de représenter un carquois par un quadruplet $\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \mathrm{s}, \mathrm{t})$ il sera remplacé par le couple $(\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1)$ ou bien pour faire simple par Q. Une flèche $\beta \in \mathrm{Q}_1$ avec $\mathrm{s}(\beta) = \mathrm{c}$ et $\mathrm{t}(\beta) = \mathrm{d}$ est représentée par $\beta : \mathrm{c} \to \mathrm{d}$.

Exemple 2.1.3. Voici des exemples de carquois finis

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "\alpha_2"] & \\ 1 \arrow[r, "\alpha_1"] & 5 & 3 \arrow[l, "\alpha_3"] \\ & 4 \arrow[u, "\alpha_4"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

À présent nous allons définir la notion d'algèbre de chemins à partir de carquois.

Définition 2.1.4. Soit $\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \mathrm{s}, \mathrm{t})$ un carquois. Un **chemin** α est une suite finie de flèches notée $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots, \alpha_n$, telle que $\mathrm{t}(\alpha_\mathrm{i}) = \mathrm{s}(\alpha_{\mathrm{i}+1})$ pour $\mathrm{i} = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n} - 1$. La **longueur** du chemin α est n. La source et le but de α correspondent à la source de α_1 et au but de α_n respectivement. Les sommets $\mathrm{x} \in \mathrm{Q}_0$ du carquois sont considérés comme des chemins **stationnaires** notés e_x. Autrement dit pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{Q}_0$ on a $\mathrm{t}(\mathrm{e}_\mathrm{x}) = \mathrm{s}(\mathrm{e}_\mathrm{x}) = \mathrm{x}$.

Exemple 2.1.5. Dans l'exemple ci-contre $\alpha\beta$ est un chemin de longueur 2.

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Remarque 2.1.6. Il faut noter que dans cette thèse on compose de la gauche vers la droite.

Puisque tous les exemples cités dans cette thèse reposent sur les algèbres de chemins, la définition suivante est la plus importante de ce chapitre.

Définition 2.1.7. Soit Q un carquois. **L'algèbre de chemins KQ** de Q sur K est la K-algèbre dont le sous-espace vectoriel sous-jacent admet l'ensemble des chemins de Q comme base. Si α_1 et α_2 sont deux chemins de Q alors la multiplication est définie par $\alpha_1\alpha_2$ si $\mathrm{t}(\alpha_1) = \mathrm{s}(\alpha_2)$ et 0 sinon.

Cette définition nous révèle que l'algèbre de chemins est une algèbre de dimension infinie si le carquois est infini ou encore comporte des cycles orientés ou des boucles. En revanche, si on est en présence d'un carquois fini sans cycles orientés alors KQ est de dimension finie, par conséquent, KQ est une K-algèbre artinienne.
Si Q est fini alors la K-algèbre KQ admet une identité notée $\mathbf{1_{KQ}} = \sum_{\mathbf{x \in Q_0}} \mathbf{e_x}$. Généralement KQ n'est pas une K-algèbre commutative.
Notons $\mathbf{R_Q}$ l'idéal de KQ engendré par les flèches de Q_1.

Exemple 2.1.8. Soit Q le carquois

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[d, "\alpha_2"] & \\
1 \arrow[r, "\alpha_1"] & 5 & 3 \arrow[l, "\alpha_3"'] \\
 & 4 \arrow[u, "\alpha_4"] &
\end{tikzcd}$$

Une base de KQ est $\mathcal{B}_{\mathrm{KQ}} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4, \mathrm{e}_5, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Puisque Q_0 et Q_1 sont finis et que le carquois Q n'admet pas de cycle orienté, KQ est de dimension finie.

2.2 Carquois liés

Les algèbres de chemins définies dans la section précédente sont très faciles à manipuler et on peut trouver une pléthore d'exemples. Dans cette section nous introduisons une classe d'algèbres qui généralise celle introduite dans la section précédente. Lorsque nous nous donnons un carquois Q, nous définissons une nouvelle classe d'idéaux bilatères appelés idéaux **admissibles**. La nouvelle classe d'algèbres que nous définirons est celle des **algèbres quotient** de KQ par un idéal admissible I, représentées par **KQ/I**.

Définition 2.2.1. Soit $(\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1)$ un carquois. Un idéal **I** de **KQ** est dit **admissible** s'il existe un entier m$\geq$ 2 tel que $\mathbf{R}_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{m}} \subseteq \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{2}}$. Dans ce cas, la paire (Q, I) s'appelle un **carquois lié**. L'algèbre quotient **KQ/I** est appelée algèbre du **carquois lié** (Q, I) ou bien de manière simple une algèbre de **carquois lié**.

Exemple 2.2.2. Soit Q le carquois suivant avec $\mathrm{I} =< \alpha^4 >$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

L'algèbre quotient est $\mathbf{A} = \mathbf{KQ/I}$. On voit bien que $\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}^4 \subseteq \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}_{\mathrm{Q}}^2$ par conséquent A est une K-algèbre de carquois lié. On vérifie aisément que sa dimension est $\dim(\mathrm{A}) = 4$.

Remarque 2.2.3. Notons que les algèbres quotients $\mathbf{A} = \mathbf{KQ/I}$ sont une généralisation des algèbres de chemins définies à la section précédente. En effet, lorsque $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ alors nous obtenons $\mathbf{A} = \mathbf{KQ}$.

Les exemples suivants peuvent être trouvés dans [57].

Exemple 2.2.4. Soit A l'algèbre de chemins donnée par le carquois

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5$$

muni des relations suivantes : $\alpha\beta = 0 = \gamma\delta$. Sa dimension globale est 2. En effet, les modules projectifs indécomposables sont :

$$\mathrm{P}_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \; ; \; \mathrm{P}_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \; ; \; \mathrm{P}_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \; ; \; \mathrm{P}_4 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \; ; \; \mathrm{P}_5 = \; 5$$

En calculant les résolutions projectives minimales des modules simples non projectifs nous avons :

$$0 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0, \quad 0 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \to 2 \to 0$$

$$0 \to 5 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \to 3 \to 0, \quad 0 \to 5 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \to 4 \to 0$$

Ainsi $\mathrm{dgl}(\mathrm{A}) = \sup\{\mathrm{dp}(\mathrm{S_i}), \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, 5\} = 2$.

Exemple 2.2.5. Considérons l'algèbre de chemins donnée par le même carquois que ci-dessus que nous munissons maintenant des relations suivantes : $\alpha\beta\gamma = 0 = \gamma\delta$. La résolution projective minimale du module simple S_1 devient $0 \to \mathrm{P}_5 \to \mathrm{P}_4 \to \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{S}_1 \to 0$ où

$$\mathrm{P}_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \; , \; \mathrm{P}_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \; , \; \mathrm{P}_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \; , \; \mathrm{P}_4 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \; , \; \mathrm{P}_5 = \; 5$$

ce qui montre que $\mathrm{dp}(\mathrm{S}_1) = 3$. Cette algèbre est de dimension globale 3.

Exemple 2.2.6. L'algèbre de chemins donnée par le carquois

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

muni des relations suivantes : $\alpha\beta = 0 = \beta\gamma = \gamma\alpha$ est de dimension globale infinie. En effet, en calculant la résolution projective minimale du simple S_1 nous obtenons : $\cdots \to \mathrm{P}_3 \to \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_3 \to \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{S}_1 \to 0$

où

$$P_1 = \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\ ,\ P_2 = \begin{matrix}2\\3\end{matrix}\ ,\ P_3 = \begin{matrix}3\\1\end{matrix}$$

2.3 Les représentations d'un carquois

Dans cette courte section, on se fixe un carquois fini Q.

Définition 2.3.1. Une **représentation** $M = (M_i, \phi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ d'un carquois Q est une collection de K-espaces vectoriels M_i pour tout $i \in Q_0$ et une collection d'applications K-linéaires $\phi_\alpha : M_{s(\alpha)} \to M_{t(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in Q_0$.
Une **représentation** M est de dimension finie si tout espace vectoriel M_i est de dimension finie. Dans ce cas le vecteur dimension $\underline{\dim}M$ de M est le vecteur $(\dim M_i)_{i \in Q_0}$ des dimensions des espaces vectoriels. Un élément d'une représentation M est un t-uplet $(m_i)_{i \in Q_0}$ avec $m_i \in M_i$.

Exemple 2.3.2. Soit Q le carquois de type $\mathbb{A}_2$:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Alors

$$M = \ K \xrightarrow{1} K$$

$$M' = \ K \xrightarrow{0} K$$

$$M'' = \ K \xrightarrow{0} 0$$

sont des représentations de Q. Les vecteurs dimensions sont : $\underline{\dim}M = \underline{\dim}M' = (1,1)$ et $\underline{\dim}M'' = (1,0)$

Définition 2.3.3. Soient Q un carquois et $M = (\dim M_i, \phi_\alpha)$, $M' = (\dim M'_i, \phi'_\alpha)$ deux représentations de Q. Un **morphisme ou homomorphisme** de représentations $f : M \to M'$ est une collection $f_i \in Q_0$ d'applications linéaires $f_i : M_i \to M'_i$ telles que pour toute flèche $i \xrightarrow{\alpha} j$ de Q_1 le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "f_i"'] & M_j \arrow[d, "f_j"] \\ M'_i \arrow[r, "\phi'_\alpha"'] & M'_j \end{tikzcd}$$

commute autrement dit $f_j \circ \phi_\alpha(m_i) = \phi'_\alpha \circ f_i(m_i)$ pour tout $m_i \in M_i$.

Définition 2.3.4. La catégorie de chemins $\mathcal{P}(Q)$ d'un carquois Q est définie par :

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{P}(Q)) = \{i \mid i \in Q_0\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(Q)}(i, j) = \text{l'espace vectoriel de base l'ensemble des chemins de i vers j.}$$

L'algèbre de chemins d'un carquois sans cycles orientés peut être représentée comme suit :

$$KQ = \oplus_{i,j \in Q_0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(Q)}(i, j)$$

dont la multiplication est représentée par la composition de chemins.

Proposition 2.3.5 ([32])**.** Les deux catégories $\mathrm{rep}_K(Q)$ et $\mathrm{mod}(KQ)$ sont équivalentes.

Notons que $\mathrm{rep}_K(Q)$ et $\mathrm{mod}(KQ)$ représentent respectivement les catégories des représentations du carquois Q et des KQ-modules.

CHAPITRE 3

Les suites d'Auslander-Reiten

De prime abord, nous aimerions attirer l'attention du lecteur que nous travaillons avec une algèbre de carquois lié A. La théorie d'Auslander-Reiten comme son nom l'évoque, a été introduite par M. Auslander et I. Reiten . Elle nous permet de représenter un carquois qu'on appelle le **carquois d'Auslander-Reiten**. Toutefois, le lecteur désireux de bien comprendre cette théorie de manière générale pourrait se référer à [5] qui est la référence dans ce domaine.

3.1 Morphismes minimaux et presque scindés

Définition 3.1.1. Soit $f : L \to M$ un morphisme de A-modules.

1. f est minimal à gauche si pour tout morphisme $h : M \to M$ tel que $h \circ f = f$ on a que h est un automorphisme.
2. f est minimal droite si pour tout morphisme $h : M \to M$ tel que $f \circ h = f$ on a que h est un automorphisme.

Remarque 3.1.2. Si f est un épimorphisme (respectivement un monomorphisme) alors f est toujours minimal à gauche (minimal à droite).

Définition 3.1.3 ([5]). Un morphisme $f : M \to L$ de A-modules est dit **presque scindé à gauche** si

1. f n'est pas une section.
2. Si $u : M \to N$ n'est pas une section alors u se factorise à travers f.

Un morphisme $f : M \to L$ est dit **presque scindé à droite** si

1. f n'est pas une rétraction.
2. Si $v : K \to L$ n'est pas une rétraction alors v se factorise à travers f.

Proposition 3.1.4 ([5]). Soient $f : L \to M$ et $g : M \to N$ deux morphismes dans modA.

1. Si f est un morphisme presque scindé à gauche alors L est indécomposable.
2. Si g est un morphisme presque scindé à droite alors N est indécomposable.

Lemme 3.1.5 ([5]).

1. Si $f : L \to M$ et $f' : L \to M'$ dans modA sont des morphismes minimaux presque scindés à gauche alors il existe un isomorphisme $h : M \to M'$ tel que $h \circ f = f'$.
2. Si $g : L \to M$ et $g' : L' \to M$ sont morphismes minimaux presque scindés à droite alors il existe un isomorphisme $k : L \to L'$ tel que $g = g' \circ k$.

Dans ce qui suit, rad P représente le radical de P et Soc I le socle de I.

Proposition 3.1.6 ([5]).

1. Soit P un A-module projectif indécomposable. Alors $f : L \to P$ est minimal presque scindé à droite si et seulement si f est un monomorphisme et $\mathrm{Im} f = \mathrm{rad} P$.
2. Soit I un A-module injectif indécomposable. Alors $g : I \to M$ est minimal presque scindé à gauche si et seulement si g est un épimorphisme et $\mathrm{Ker} g = \mathrm{Soc} I$.

Définition 3.1.7. Un morphisme $f : X \to Y$ est **irréductible** si

1. f n'est ni une section, ni une rétraction.
2. Si $f = f_1 \circ f_2$ alors f_1 est une rétraction ou f_2 est une section.

Lemme 3.1.8 ([5]). Soit $f : X \to Y$ un morphisme irréductible alors f est un monomorphisme ou un épimorphisme.

Lemme 3.1.9 ([5]).

1. Si $f : L \to M$ est minimal presque scindé à gauche alors f est irréductible.
2. Si $g : M \to N$ est minimal presque scindé à droite alors g est irréductible.

Définition 3.1.10 ([5]). Une suite exacte courte de A-modules $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ est dite **presque scindée** si

1. f est minimal presque scindé à gauche.
2. g est minimal presque scindé à droite.

Remarque 3.1.11. Soit $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ une suite presque scindée. Alors elle n'est pas scindée, de plus L et N sont indécomposables.

Theorème 3.1.12 ([5]). Soit $\eta : 0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. η est presque scindée.
2. L est indécomposable et g est presque scindé à droite.
3. N est indécomposable et f est presque scindé à gauche.
4. f est minimal presque scindé à gauche.
5. g est minimal presque scindé à droite.
6. L, N sont indécomposables et f, g sont irréductibles.

Définition 3.1.13. Soient M et N deux A-modules. On définit l'ensemble suivant :

$\mathcal{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \{\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un morphisme tel que f se factorise à travers un module projectif$\}$

Proposition 3.1.14 ([5])**.** Pour tous A-modules M et N, la famille d'espaces vectoriels

$\mathcal{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \{\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un morphisme tel que f se factorise à travers un module projectif$\}$

est un idéal de modA.

Définition 3.1.15 ([5])**.** Puisque $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathrm{M},\mathrm{N}} \mathcal{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ est un idéal de modA, on peut ainsi définir la catégorie quotient $\underline{\mathrm{mod}}(\mathrm{A}) = \mathrm{modA}/\mathcal{P}$ appelée la **catégorie stable projective**. Ses objets et ses morphismes sont définis ci-dessous

$$\mathcal{O}\mathrm{bj}(\underline{\mathrm{mod}}\mathrm{A}) = \mathcal{O}\mathrm{bj}(\mathrm{modA})$$

$$\underline{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})/\mathcal{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Dualement, on peut construire un idéal $\mathcal{I}$ dans modA comme suit :

$\mathcal{I}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \{\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un morphisme tel que f se factorise à travers un module injectif$\}$

La catégorie quotient $\overline{\mathrm{mod}}(\mathrm{A}) = \mathrm{modA}/\mathcal{I}$ est appelée **la catégorie stable injective**. Ses objets et ses morphismes sont définis ci-dessous

$$\mathcal{O}\mathrm{bj}(\overline{\mathrm{mod}}\mathrm{A}) = \mathcal{O}\mathrm{bj}(\mathrm{modA})$$

$$\overline{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})/\mathcal{I}(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Définition 3.1.16. Le foncteur de transposition

$$\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}(\mathrm{A}) \to \overline{\mathrm{mod}}(\mathrm{A})^{\mathrm{op}}$$

est défini comme suit sur les objets. Nous considérons une présentation projective minimale $\mathrm{P}_1 \xrightarrow{\mathrm{p}_0} \mathrm{P}_0 \xrightarrow{\mathrm{p}_1} \mathrm{M} \to 0$ de M à laquelle on applique le foncteur $\mathbf{Hom_A}(-, \mathbf{A}) = (-)^{\mathbf{t}}$. Ainsi, nous obtenons la suite exacte suivante : $0 \to \mathrm{M}^{\mathrm{t}} \to \mathrm{P}_0^{\mathrm{t}} \to \mathrm{P}_1^{\mathrm{t}} \to \mathrm{Cokerp}_1^{\mathrm{t}} \to 0$. Par définition $\mathrm{TrM} = \mathrm{Cokerp}_1^{\mathrm{t}}$ qui correspond à la transposition de M.

Définition 3.1.17 ([5])**.** Les translations d'Auslander-Reiten sont les foncteurs suivants :

$$\tau_{\mathrm{A}} = \mathrm{DTr} : \underline{\mathrm{mod}}(\mathrm{A}) \to \overline{\mathrm{mod}}(\mathrm{A})$$

$$\tau_{\mathrm{A}}^{-1} = \mathrm{TrD} : \overline{\mathrm{mod}}(\mathrm{A}) \to \underline{\mathrm{mod}}(\mathrm{A})$$

où $\mathrm{D} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(-, \mathrm{K})$ est la dualité standard.

Remarque 3.1.18.

1. $\tau_{\mathrm{A}}\mathrm{M} = 0$ si et seulement si M est projectif.
2. $\tau_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{M} = 0$ si et seulement si M est injectif.

Définition 3.1.19. Le **foncteur de Nakayama** de modA est défini comme l'endofoncteur $\nu_{\mathrm{A}} = \mathrm{DHom}_{\mathrm{A}}(-, \mathrm{A}) : \mathrm{mod}(\mathrm{A}) \to \mathrm{mod}(\mathrm{A})$. De manière similaire, nous définissons le foncteur inverse $\nu_{\mathrm{A}}^{-1} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{DA}, -)$ qui est quasi-inverse à ν_{A}.

Proposition 3.1.20 ([5])**.**

1. Une présentation projective minimale $\mathrm{P}_1 \xrightarrow{\mathrm{p}_0} \mathrm{P}_0 \xrightarrow{\mathrm{p}_1} \mathrm{M} \to 0$ induit une suite exacte $0 \to \tau_{\mathrm{A}}\mathrm{M} \to \nu_{\mathrm{A}}\mathrm{P}_1 \to \nu_{\mathrm{A}}\mathrm{P}_0 \to \nu_{\mathrm{A}}\mathrm{M} \to 0$.
2. Une coprésentation injective minimale $0 \to \mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{i}_0} \mathrm{I}_0 \xrightarrow{\mathrm{i}_1} \mathrm{I}_1$ induit une suite exacte $0 \to \nu_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{M} \to \nu_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{I}_1 \to \nu_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{I}_0 \to \tau_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{M} \to 0$.

Lemme 3.1.21 ([5])**.** Soient M et N des A-modules.

1. $\mathrm{dp}(\mathrm{M}) \leq 1$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{DA}, \tau_{\mathrm{A}}\mathrm{M}) = 0$.
2. $\mathrm{di}(\mathrm{N}) \leq 1$ si et seulement si $\mathrm{DHom}_{\mathrm{A}}(\tau_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{N}, \mathrm{A}) = 0$.

Theorème 3.1.22 ([10] **Formules d'Auslander-Reiten**)**.** Soient M et N des A-modules. Alors il existe les isomorphismes fonctoriels suivants :

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{D}\underline{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}}(\tau_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{N}, \mathrm{M}) \simeq \mathrm{D}\overline{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}}(\mathrm{N}, \tau_{\mathrm{A}}\mathrm{M}).$$

Corollaire 3.1.23 ([5])**.**

1. $\mathrm{dp}(\mathrm{M}) \leq 1$ alors $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \tau_{\mathrm{A}}\mathrm{M})$.
2. $\mathrm{di}(\mathrm{N}) \leq 1$ alors $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathrm{A}}(\tau_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{N}, \mathrm{M})$.

Theorème 3.1.24 ([7] **Théorème d'existence d'Auslander-Reiten).**

1. Pour tout A-module indécomposable non projectif M, il existe une suite presque scindée $0 \to \tau_A M \to E \to M \to 0$.

2. Pour tout A-module indécomposable non injectif N, il existe une suite presque scindée $0 \to N \to F \to \tau_A^{-1} N \to 0$.

Proposition 3.1.25 ([5]).

1. Soit M un A-module indécomposable non projectif. Il existe un morphisme irréductible $f : X \to M$ si et seulement s'il existe un morphisme irréductible $f' : \tau_A M \to X$.

2. Soit N un A-module indécomposable non injectif. Il existe un morphisme irréductible $g : N \to Y$ si et seulement s'il existe un morphisme irréductible $g' : Y \to \tau_A^{-1} N$.

Corollaire 3.1.26 ([5]).

1. Soit S un A-module simple projectif non injectif. Si $f : S \to M$ est irréductible alors M est projectif.

2. Soit S un A-module simple injectif non projectif. Si $g : N \to S$ est irréductible alors N est injectif.

3.2 Le carquois d'Auslander-Reiten

Dans cette section nous allons présenter les différentes étapes pour construire le carquois d'Auslander-Reiten.

Définition 3.2.1. Soient M, N deux A-modules. Nous définissons le radical entre deux modules de la façon suivante

$$\mathbf{rad_A(M, N)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{f} \in \mathrm{Hom_A(M, N)} \mid \text{ pour tout A-module X indécomposable} \\ \forall \ \mathrm{n : N \to X \text{ et } m : X \to M \text{ alors } nfm \in radEndX} \end{array} \right\}$$

Dans cette définition radEndX représente le radical de l'anneau EndX.

Lemme 3.2.2 ([5]).

1. Le radical $\mathrm{rad_A(M, N)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom_A(M, N)}$.
2. Si M est indécomposable alors $\mathrm{rad_A(M, N)} = \{\mathrm{f : M \to N}, \ \text{ f n'est pas une section}\}$.
3. Si N est indécomposable alors $\mathrm{rad_A(M, N)} = \{\mathrm{f : M \to N}, \ \text{ f n'est pas une rétraction}\}$.
4. Si M et N sont indécomposables alors $\mathrm{rad_A(M, N)} = \{\mathrm{f : M \to N}, \ \text{ f n'est pas inversible}\}$.

Lemme 3.2.3 ([5]). Soient M, N deux A-modules indécomposables et $\mathrm{f : M \to N}$ un morphisme de A-modules. f est irréductible si et seulement si f appartient à $\mathbf{rad_A(M, N)} \setminus \mathbf{rad_A^2(M, N)}$.

Définition 3.2.4. $\mathbf{Irr(M, N)} = {}^{\mathbf{rad_A(M, N)}}/_{\mathbf{rad_A^2(M, N)}}$ représente l'espace des morphismes irréductibles.

Proposition 3.2.5 ([5]). Soient $M = \oplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i}$ un A-module avec M_i indécomposables, deux à deux non isomorphes et K un corps algébriquement clos.

1. Soit $f : L \to M$ un morphisme de A-modules avec L indécomposable, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_t \end{bmatrix}$ où $f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ \vdots \\ f_{in_i} \end{bmatrix} : L \to M_i^{n_i}$. Alors f est minimal presque scindé à gauche si et seulement si f_{ij} appartient à $\mathrm{rad}_A(L, M_i)$, leurs classes résiduelles $\overline{f_{i1}}, \overline{f_{i2}}, \ldots \overline{f_{in_i}}$ modulo $\mathrm{rad}_A^2(L, M_i)$ forment une K-base de $\mathrm{Irr}(L, M_i)$ pour tout i. En outre il existe un module indécomposable M' tel que $\mathrm{Irr}(L, M') \neq 0$ si et seulement si $M \simeq M_j$ pour un certain j.

2. Soit $g : M \to N$ un morphisme de A-modules avec N indécomposable, $g = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_t \end{bmatrix}$ où $g_i = \begin{bmatrix} g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{in_i} \end{bmatrix} : M_i^{n_i} \to N$. Alors f est minimal presque scindé à droite si et seulement si g_{ij} appartient à $\mathrm{rad}_A(M_i, N)$, leurs classes résiduelles $\overline{g_{i1}}, \overline{g_{i2}}, \ldots \overline{g_{in_i}}$ modulo $\mathrm{rad}_A^2(M_i, N)$ forment une K-base de $\mathrm{Irr}(M_i, N)$ pour tout i. En outre il existe un module indécomposable M' tel que $\mathrm{Irr}(M', N) \neq 0$ si et seulement si $M' \simeq M_j$ pour un certain j.

Corollaire 3.2.6 ([5]). Soient X et Y des A-modules indécomposables.

1. Si $\tau X \neq 0$ et $\tau Y \neq 0$, alors il existe un isomorphisme K-linéaire
$$\mathrm{Irr}(\tau X, \tau Y) \simeq \mathrm{Irr}(X, Y)$$

2. Si $\tau^{-} X \neq 0$ et $\tau^{-} Y \neq 0$, alors il existe un isomorphisme K-linéaire
$$\mathrm{Irr}(\tau^{-} X, \tau^{-} Y) \simeq \mathrm{Irr}(X, Y)$$

Définition 3.2.7 ([5]). Soit A une K-algèbre de dimension finie où K est un corps algébriquement clos. Le carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ est défini comme suit :

1. Les points sont les classes d'isomorphismes des A-modules indécomposables de dimension finie.
2. Soient $[\,\mathrm{M}]$ et $[\,\mathrm{N}]$ les points dans $\Gamma(\mathrm{modA})$ correspondant aux modules indécomposables dans modA. Les flèches $[\,\mathrm{M}] \ \to [\,\mathrm{N}]$ sont en correspondance bijective avec les vecteurs d'une base du K-espace vectoriel $\mathrm{Irr}(\mathrm{M},\mathrm{N})$.

Dans ce qui suit nous allons présenter un exemple de carquois d'Auslander-Reiten.

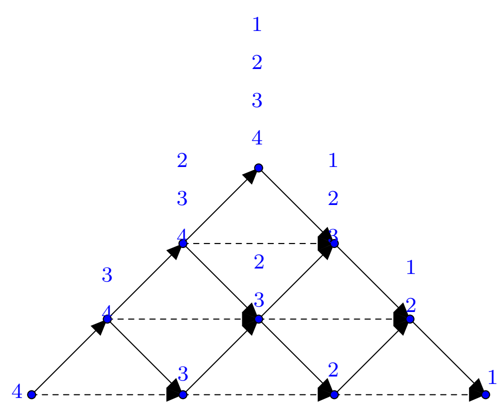
Exemple 3.2.8. Considérons l'algèbre de chemins A donnée par le carquois

$$\mathrm{Q} = \ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4$$

Les projectifs et injectifs indécomposables de A sont représentés ci-dessous

$$\mathrm{P}_1 = \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} ; \ \mathrm{P}_2 = \begin{array}{c}2\\3\\4\end{array} ; \ \mathrm{P}_3 = \begin{array}{c}3\\4\end{array} ; \ \mathrm{P}_4 = \ 4 \ ; \ \mathrm{I}_1 = \ 1 \ ; \ \mathrm{I}_2 = \begin{array}{c}1\\2\end{array} ; \ \mathrm{I}_3 = \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} ; \ \mathrm{I}_4 = \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de A est représenté ci-dessous :



CHAPITRE 4

Recollement et modules de Cohen-Macaulay

Dans ce chapitre nous établirons un lien entre les recollements et les modules maximaux de Cohen-Macaulay. En résumé, les recollements sont des suites exactes de catégories abéliennes $0 \to \mathscr{B} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathscr{A} \xrightarrow{\mathrm{e}} \mathscr{C} \to 0$, où i est le foncteur d'inclusion défini entre $\mathscr{B}$ et $\mathscr{A}$ ($\mathscr{B}$ étant ainsi considérée comme une sous-catégorie de Serre (voir définition 1.1.3) de $\mathscr{A}$) et e est le foncteur quotient entre $\mathscr{A}$ et $\mathscr{C}$ (où $\mathscr{C} = \mathscr{A}/\mathscr{B}$ est la catégorie quotient de $\mathscr{A}$ par la sous-catégorie de Serre $\mathscr{B}$). Dans cette situation le foncteur d'inclusion i admet un adjoint à gauche q et un adjoint à droite p . Il en est de même pour le foncteur quotient e qui admet un adjoint à gauche l et un adjoint à droite r. Un pareil contexte de recollement est représenté par un diagramme de cette forme tout au long du document.

$$\mathbf{R}(\mathscr{B},\mathscr{A},\mathscr{C}): \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "\mathrm{i}"] & \mathscr{A} \arrow[l, bend right, "\mathrm{q}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{p}"] \arrow[r, "\mathrm{e}"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "\mathrm{l}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{r}"] \end{tikzcd}$$

Les recollements ont été pour la première fois introduits par Beilinson, Bernstein et Deligne dans leur ouvrage intitulé « Faisceaux pervers», voir [11]. Ils les ont utilisés dans un contexte de catégories triangulées dans leur axiomatisation des six foncteurs de Grothendieck pour les catégories dérivées de faisceaux [3] obtenues à partir des espaces de stratification. Autrement dit les recollements ont été implicitement définis par ce dernier. C'est en 1988 que Cline, Parshall et Scott (voir [22]) ont utilisé les recollements en théorie des représentations. Et depuis lors ils ne cessent de susciter un intérêt au sein de la communauté scientifique, (voir [56], [55], [29], [2], [61], [41]). Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Cline, Parshall et Scott ont montré qu'il existe toujours un recollement sur les catégories de modules

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}\ A/<e> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ A \arrow[l, bend right, "-\otimes_A A/<e>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_A(A/<e>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(eA,-)"] & \mathrm{mod}\ eAe. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{eAe} eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"] \end{tikzcd}$$

où $< e >= AeA$.

Le but principal de ce chapitre est de montrer que lorsque nous nous restreignons aux catégories de modules de Cohen-Macaulay(MCM) le recollement ci-dessus est le même et les foncteurs restent inchangés.

4.1 Recollements

Définition 4.1.1 ([55]). Un **recollement** entre catégories abéliennes $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{C}$, représenté par $\mathbf{R}(\mathscr{B},\mathscr{A},\mathscr{C})$, est un diagramme de foncteurs additifs définis comme suit et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\mathbf{R}(\mathscr{B},\mathscr{A},\mathscr{C}): \quad \begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "i"] & \mathscr{A} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "e"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "l"'] \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

1. (l, e, r) et (q, i, p) sont des triplets adjoints ;
2. Les foncteurs i, l, et r sont fidèles et pleins ;

3. $\mathsf{Im}\,\mathrm{i} = \mathsf{Ker}\,\mathrm{e}$.

Remarque 4.1.2. $(\mathrm{l}, \mathrm{e}, \mathrm{r})$ est un triplet adjoint signifie que (l, e) et (e, r) sont des paires de foncteurs adjoints.

L'exemple qui suit peut être trouvé dans [52].

Exemple 4.1.3. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Alors nous avons le recollement sur les A-modules

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}\ \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ \mathrm{A} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{mod}\ \mathrm{eAe} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"] \end{tikzcd}$$

Dans ce qui suit, nous posons $\mathrm{B} = \mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ et $\mathrm{C} = \mathrm{eAe}$.

Exemple 4.1.4. Soit A la K-algèbre de chemins donnée par le carquois

$$\mathrm{Q} = \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

Posons $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$ alors l'algèbre de chemins $\mathrm{B} = \mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ est donnée par le carquois

$$\mathrm{Q_B} = \ 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

L'algèbre de chemins $\mathrm{C} = \mathrm{eAe}$ est donnée par le carquois

$$\mathrm{Q_C} = \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Alors $\{\mathrm{mod(B)}, \mathrm{mod(A)}, \mathrm{mod(C)}\}$ est un recollement.

Proposition 4.1.5 ([55])**.** Soit $\mathbf{R}(\mathscr{B}, \mathscr{A}, \mathscr{C})$ un recollement de catégories abéliennes. Les propriétés suivantes sont satisfaites

$$\mathbf{R}(\mathscr{B}, \mathscr{A}, \mathscr{C}): \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "\mathrm{i}"] & \mathscr{A} \arrow[l, bend right, "\mathrm{q}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{p}"] \arrow[r, "\mathrm{e}"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "\mathrm{l}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{r}"] \end{tikzcd}$$

1. Les foncteurs i et e sont exacts.

2. Les compositions ei, ql et pr sont toutes nulles.

3. Les unités des paires de foncteurs adjoints (i, p), (l, e) et les co-unités des paires de foncteurs adjoints (q, i), (e, r) induisent les isomorphismes suivants :
pi $\simeq \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$; el $\simeq \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$; qi $\simeq \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$; er $\simeq \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$.

4. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Il existe B et B′ des objets de $\mathcal{B}$ tels que les unités et les co-unités des adjonctions induisent les suites exactes suivantes

$$0 \to \mathrm{i(B)} \to \mathrm{le(A)} \xrightarrow{\mu_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{A}}} \mathrm{iq(A)} \to 0$$

$$0 \to \mathrm{ip(A)} \xrightarrow{\nu_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \xrightarrow{\beta_{\mathrm{A}}} \mathrm{re(A)} \to \mathrm{i(B')} \to 0$$

5. Les foncteurs l et q préservent les objets projectifs et les foncteurs r et p préservent les objets injectifs.

Corollaire 4.1.6. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Alors nous avons le recollement sur les A-modules

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mod}\ \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ \mathrm{A} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{mod}\ \mathrm{eAe}. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

1. Les foncteurs inc et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, -)$ sont exacts.

2. Les compositions suivantes sont toutes nulles $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, -) \circ \mathrm{inc} = 0$,
$(- \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \circ (- \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}) = 0$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, -) \circ \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, -) = 0$

3. Nous avons les isomorphismes suivants induits par les unités et co-unités des paires de foncteurs adjoints.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, -) \circ \mathrm{inc} \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{modA}/<\mathrm{e}>}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, -) \circ (- \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}) \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{modeAe}}$$

$$(-\otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \circ \mathrm{inc} \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{modA}/<\mathrm{e}>}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-) \circ \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-) \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{modeAe}}$$

4. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{modA}$. Il existe N et N′ des A/<e>-modules tels que les unités et les counités des adjonctions induisent les suites exactes suivantes

$$0 \to \mathrm{N} \to \mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \xrightarrow{\mu_{\mathrm{M}}} \mathrm{M} \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{M}}} \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M}) \xrightarrow{\nu_{\mathrm{M}}} \mathrm{M} \xrightarrow{\beta_{\mathrm{M}}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \to \mathrm{N}' \to 0$$

5. Les foncteurs $-\otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}$, $-\otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ préservent les modules projectifs et les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)$ préservent les modules injectifs.

Theorème 4.1.7 ([55])**.** Soit $\mathbf{R}(\mathscr{B},\mathscr{A},\mathscr{C})$ un recollement de catégories abéliennes telles que $\mathscr{A}$ admette suffisamment de projectifs et injectifs et $\mathscr{C}$ admette suffisamment de projectifs.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "i"] & \mathscr{A} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "e"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "l"'] \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

Soient B et B′ des objets de $\mathscr{A}$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(a) L'application $\mathrm{e}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} : \mathrm{Ext}^{\mathrm{j}}_{\mathscr{A}}(\mathrm{B},\mathrm{B}') \to \mathrm{Ext}^{\mathrm{j}}_{\mathscr{C}}(\mathrm{e}(\mathrm{B}),\mathrm{e}(\mathrm{B}'))$ est un isomorphisme fonctoriel pour tout $\mathrm{j} \geq 0$.

(b) $\mathrm{Ext}^{\mathrm{j}}_{\mathscr{A}}(\mathrm{B},\mathrm{i}(\mathrm{I})) = 0$ pour tout $\mathscr{B}$-objet injectif I et $\mathrm{j} \geq 0$.

Corollaire 4.1.8. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Nous avons le recollement suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}\ \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ \mathrm{A} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{mod}\ \mathrm{eAe} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"] \end{tikzcd}$$

Pour tous A-modules M et M′ les énoncés suivants sont équivalents :

1. L'application $e^j_{M,M'}$: $\mathrm{Ext}^j_A(M, M') \rightarrow \mathrm{Ext}^j_{eAe}(Me, M'e)$ est un isomorphisme fonctoriel pour tout $j \geq 0$.

2. $\mathrm{Ext}^j_A(M, I) = 0$ pour tout A/<e>-module injectif I et $j \geq 0$.

4.2 Idéaux stratifiants

Nous introduisons dans cette courte section les idéaux stratifiants et quelques propriétés.

Définition 4.2.1 ([30]). Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. L'idéal AeA = <e> est dit **stratifiant** si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1. L'application multiplication $f : Ae \otimes_{eAe} eA \rightarrow AeA$ est un isomorphisme de A-A-bimodules et $\mathrm{Tor}^{eAe}_n(Ae, eA) = 0$ pour tout $n \geq 1$.
2. $\mathrm{Ext}^n_B(X, Y) \simeq \mathrm{Ext}^n_A(X, Y)$ pour tout $n \geq 1$ et $X, Y \in \mathrm{mod}(B)$.

Remarque 4.2.2. Rappelons que si A est une K-algèbre et e un idempotent de A alors la donnée d'un A/<e>-module M équivaut à la donnée d'un A-module M tel que $Me = 0$.

Exemple 4.2.3. Soit A la K-algèbre de chemins donnée par le carquois

$$Q_A = \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

munie des relations $\alpha\beta = 0 = \beta\gamma$. Posons $e = e_1 + e_2$ alors l'algèbre quotient B = A/<e> est l'algèbre de chemins donnée par le carquois

$$Q_B = \ 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

Notre objectif dans cet exemple est de montrer que l'idéal AeA est stratifiant. La deuxième condition homologique de la définition 4.2.1 d'un idéal stratifiant est beaucoup plus facile à vérifier c'est à dire $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{B}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ pour tout M, $\mathrm{N} \in \mathrm{modB}$ et $\mathrm{i} \geq 1$. En effet, ceci suit du fait que $\mathrm{Q_B}$ est un sous-carquois plein et convexe de $\mathrm{Q_A}$.

Le lemme et le corollaire qui suivent sont un bel outil pour vérifier si un idéal AeA est stratifiant.

Lemme 4.2.4 ([40])**.** Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A. Alors AeA est un $\mathrm{A^{op}}$-module projectif (respectivement un A-module projectif) si et seulement si eA (respectivement Ae) est un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif (respectivement un eAe-module projectif) et la multiplication $\mathrm{Ae} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \rightarrow \mathrm{AeA}$ est un isomorphisme de A-A bimodules.

Corollaire 4.2.5. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A. Si AeA est un $\mathrm{A^{op}}$-module projectif (ou un A-module projectif) alors AeA est un idéal stratifiant.

4.3 Idéaux source, puits et propriétés

Dans cette section, nous présentons deux notions nouvelles que nous avons définies en l'occurrence les idéaux sources et puits. Ces derniers sont d'une importance capitale, en effet tous nos résultats reposent dessus. Ces notions nous ont également permis de prouver plusieurs propriétés.

Définition 4.3.1. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A. Posons $\mathrm{e}' = 1 - \mathrm{e}$.

1. L'idéal AeA est dit **source** si $\mathrm{e'Ae} = 0$.
2. L'idéal AeA est dit **puits** si $\mathrm{eAe'} = 0$.

Remarque 4.3.2. Si AeA est un idéal source alors $\mathrm{Ae'A}$ est un idéal puits et vice-versa.

Exemple 4.3.3. Soit A l'algèbre de chemins donnée par le carquois

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "\alpha_2"] & \\ 1 \arrow[r, "\alpha_1"] & 5 & 3 \arrow[l, "\alpha_3"'] \\ & 4 \arrow[u, "\alpha_4"] & \end{tikzcd}$$

Posons $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 + \mathrm{e}_4$ et $\mathrm{e}' = \mathrm{e}_5$. Alors AeA et Ae′A sont respectivement des idéaux source et puits.

Lemme 4.3.4. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A. Choisissons un $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$.

1. *Les éléments* $\mathrm{y} = \mathrm{e} + \mathrm{exe}', \mathrm{z} = \mathrm{e} + \mathrm{e}'\mathrm{xe}, \mathrm{k} = \mathrm{e}' + \mathrm{e}'\mathrm{xe}$ *et* $\mathrm{r} = \mathrm{e}' + \mathrm{exe}'$ *sont aussi des idempotents de A.*
2. *Si AeA est un idéal source alors AyA est un idéal source.*
3. *Si AeA est un idéal source alors ArA est un idéal puits.*
4. *Si AeA est un idéal puits alors AzA est un idéal puits.*
5. *Si AeA est un idéal puits alors AkA est un idéal source.*

Preuve. 1. Nous avons

$$\mathrm{y}^2 = (\mathrm{e} + \mathrm{exe}')(\mathrm{e} + \mathrm{exe}')$$
$$\mathrm{y}^2 = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2\mathrm{xe}' + \mathrm{exe}'\mathrm{e} + \mathrm{exe}'\mathrm{exe}'$$
$$\mathrm{y}^2 = \mathrm{e} + \mathrm{exe}' = \mathrm{y},$$

$$\mathrm{k}^2 = (\mathrm{e}' + \mathrm{e}'\mathrm{xe})(\mathrm{e}' + \mathrm{e}'\mathrm{xe})$$
$$\mathrm{k}^2 = \mathrm{e}'^2 + \mathrm{e}'^2\mathrm{xe} + \mathrm{e}'\mathrm{xee}' + \mathrm{e}'\mathrm{xee}'\mathrm{xe}$$
$$\mathrm{k}^2 = \mathrm{e}' + \mathrm{e}'\mathrm{xe} = \mathrm{k},$$

$r^2 = (e' + exe')(e' + exe')$

$r^2 = e'^2 + e'exe' + exe'^2 + exe'exe'$

$r^2 = e' + exe' = r,$

et

$z^2 = (e + e'xe)(e + e'xe)$

$z^2 = e^2 + ee'xe + e'xe^2 + e'xee'xe$

$z^2 = e + e'xe = z$

2. Supposons que AeA est un idéal source. Alors

$$(1 - y)Ay = (e' - exe')A(e + exe') = (1 - ex)e'Ae + (1 - ex)e'Aexe' = 0$$

Ainsi AyA est un idéal source. Les autres énoncés se montrent de façon analogue au moyen de z, r et k.

□

Corollaire 4.3.5. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A.

1. Si AeA est un idéal source alors AeA est un idéal stratifiant.

2. Si AeA est un idéal puits alors AeA est un idéal stratifiant.

Preuve. 1. Supposons que AeA est un idéal source. L'algèbre A se décompose sous forme de A-module comme suit

$$A_A \simeq eA \oplus e'A$$

Ainsi on a $AeA_A \simeq eAeA \oplus e'AeA$. Puisque AeA est un idéal source alors le deuxième terme de la somme directe s'annule. Il s'ensuit que $AeA_A \simeq eA$. D'après le corollaire 4.2.5 AeA est un idéal stratifiant.

2. La deuxième propriété se montre de façon analogue. En effet, on utilise la décomposition de A en tant que A^{op}-module.

$\square$

Définition 4.3.6. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A. Considérons les idempotents suivants $y = e + exe', z = e + e'xe, k = e' + e'xe$ et $r = e' + exe'$. Les idéaux AyA, AzA, AkA et ArA sont dits **non-triviaux** s'il existe x dans A tels que y, k, z et r soient différents de e.

Remarque 4.3.7. Notons qu'un idéal AeA peut être stratifiant sans qu'il ne soit source ni puits (voir exemple ci-dessous).

Avant de donner un exemple, on introduit une autre définition d'un idéal stratifiant dans le cas où l'algèbre est artinienne (voir proposition ci-dessous). Auslander, Platzeck et Todorov sont à l'origine de celle-ci.

Proposition 4.3.8 ([7])**.** Soient A une K-algèbre artinienne et I un idéal bilatère. Alors I est stratifiant si et seulement si $\mathrm{Ext}^i_A(A/I, J) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et pour tout A/I-module injectif J.

Énonçons cette proposition dont on aura besoin dans notre exemple.

Proposition 4.3.9 ([4])**.** Soient $\Phi : A \to B$ un morphisme de K-algèbres, M un A-module, N un B-module.

1. Si B est un A^{op}-module projectif alors pour tout $i \geq 0$ on a les isomorphismes fonctoriels ci-dessous

$$\mathrm{Ext}^i_B(M \otimes_A B, N) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, N).$$

Exemple 4.3.10. Soit A la K-algèbre de chemins munie de la relation suivante

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd} \qquad \beta\alpha=0$$

Posons $e = e_2$, alors l'algèbre quotient $B = A/<e>$ est donnée par le carquois

$$Q_B = \quad \bullet 1$$

En vertu de la proposition 4.3.8, l'idéal AeA est stratifiant si et seulement si $\mathrm{Ext}^i_A(A/<e>, I) = 0$ pour tout $I \in \mathrm{Inj}(A/<e>)$ et pour tout $i \geq 1$.
Or $\mathrm{Inj}(A/<e>) = \mathrm{add}\{1\}$. $\mathrm{Inj}(A/<e>)$ représente la sous-catégorie des $A/<e>$-modules injectifs. Pour montrer que l'idéal AeA est stratifiant, il suffit de vérifier l'égalité ci-dessous

$$\mathrm{Ext}^i_A(A/<e>, I) = \mathrm{Ext}^i_A(\ 1\ ,\ 1\ ) = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \geq 1.$$

Représentons ci-dessous les A-modules projectifs.

$$P_1^A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\ ,\ P_2^A = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

La résolution projective du A-module simple est :

$$0 \to \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \to \ 1 \ \to 0$$

Puisque la dimension projective de S_1 est égale à 1, il s'ensuit que $\mathrm{Ext}^i_A(1,1) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

Il suit du théorème 3.1.22 que nous avons l'isomorphisme suivant

$$\mathrm{Ext}^1_A(1,1) \simeq D\mathrm{Hom}_A(1, \tau 1) \simeq D\mathrm{Hom}_A(1,2) = 0.$$

D'où $\mathrm{Ext}^i_A(A/<e>, I) = 0$ pour tout $I \in \mathrm{Inj}(A/<e>)$ et $i \geq 1$. Par conséquent, l'idéal AeA est stratifiant. Toutefois il n'est ni source, ni puits. En effet, $eAe' = e_2Ae_1 \neq 0$ et $e'Ae = e_1Ae_2 \neq 0$.

Cet exemple conduit à la définition suivante.

Définition 4.3.11. Un idéal stratifiant AeA est dit **neutre** s'il n'est ni source, ni puits.

Le lemme qui suit donne des conditions nécessaires sous lesquelles un idéal stratifiant est source ou puits.

Lemme 4.3.12. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A.

1. AeA a une structure de $A/<e'>$-module si et seulement si AeA est un idéal puits.
2. AeA a une structure de $(A/<e'>)^{op}$-module si et seulement si alors AeA est un idéal source.

Preuve.
1. $AeAe' = 0$ ce qui équivaut à dire que $eAe' = 0$ si et seulement si AeA est un idéal puits.
2. Se montre de manière analogue à (1).

□

Définition 4.3.13 ([54]). Soients A et B des K-algèbres, ${}_A N_B$ un A-B-bimodule et ${}_B M_A$ un B-A-bimodule, $\phi : M \otimes_A N \to B$ un homomorphisme de B-B-bimodule et $\psi : N \otimes_B M \to A$ un homomorphisme de A-A-bimodule. On appelle **contexte de Morita** $\mathcal{M} = (M, N, A, B, \phi, \psi)$ ou **algèbre de matrice généralisée** la K-algèbre définie comme suit :

$$\Lambda_{(\phi,\psi)}(\mathcal{M}) = \begin{bmatrix} A & {}_A N_B \\ {}_B M_A & B \end{bmatrix}$$

où l'addition d'éléments de $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ se fait composante par composante et la multiplication est donnée par :

$$\begin{bmatrix} a & n \\ m & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & n' \\ m' & b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + \psi(n \otimes m') & an' + nb' \\ ma' + bm' & bb' + \phi(m \otimes n') \end{bmatrix}$$

Les $\Lambda_{(\phi,\psi)}$-modules sont les quadruplets (X, Y, f, g) où $X \in$ mod-A, $Y \in$ mod-B,

$f : M \otimes_A X \to Y$ et $g : N \otimes_B Y \to X$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A N \otimes_B Y & \xrightarrow{1_M \otimes g} & M \otimes_A X \\ {\scriptstyle \phi \otimes 1_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B \otimes_B Y & \xrightarrow[k]{} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N \otimes_B M \otimes_A X & \xrightarrow{1_N \otimes f} & N \otimes_B Y \\ {\scriptstyle \psi \otimes 1_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A \otimes_A X & \xrightarrow[k']{} & X \end{array}$$

où k et k' sont les isomorphismes naturels.

Définition 4.3.14 ([4]). Soient A et B des K-algèbres, et ${}_BM_A$ un B-A-bimodule. On appelle **algèbre de matrice triangulaire**, le contexte de Morita $\mathcal{M} = (M, 0, A, B, 0, 0)$, représenté par :

$$T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ {}_BM_A & B \end{bmatrix}$$

et les T-modules sont représentés par les triplets (X, Y, f) où $X \in$ mod-A, $Y \in$ mod-B et $f : M \otimes_A X \to Y$

Remarque 4.3.15. Toute K-algèbre A peut s'écrire sous forme d'une algèbre de matrice. En effet, si e est un idempotent de A alors A peut se décomposer comme une somme directe de K-modules de la façon suivante : $A \simeq eAe \oplus eAe' \oplus e'Ae' \oplus e'Ae$. Ainsi on a $A \simeq \begin{bmatrix} e'Ae' & e'Ae \\ eAe' & eAe \end{bmatrix}$

En guise de rappel notons que $e' = 1 - e$.

La proposition et le théorème qui suivent revêtent une importance capitale. En effet, ils interviennent un peu partout dans nos résultats. Puisqu'ils reposent principalement sur les notions d'idéaux sources et puits, c'est la raison pour laquelle nous avons jugé opportun de les énoncer un peu plus tôt.

Proposition 4.3.16. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A. Alors les énoncés ci-dessous sont vérifiés :

1. Si AeA est un idéal source alors AeA est un A-module projectif.

2. AeA est un idéal source si et seulement si $\mathbf{A} \simeq \begin{bmatrix} \mathbf{e'Ae'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{eAe'} & \mathbf{eAe} \end{bmatrix}$

3. Si AeA est un idéal source alors $\mathbf{A}/<\mathbf{e}> \simeq \mathbf{e'A}$ en tant que A-modules.

4. Si AeA est un idéal source alors $\mathbf{A}/<\mathbf{e'}> \simeq \mathbf{Ae}$ en tant que A^{op}-modules.

5. Si AeA est un idéal puits alors AeA est un A^{op}-module projectif.

6. AeA est un idéal puits si et seulement si $\mathbf{A} \simeq \begin{bmatrix} \mathbf{e'Ae'} & \mathbf{e'Ae} \\ \mathbf{0} & \mathbf{eAe} \end{bmatrix}$

7. Si AeA est un idéal puits alors $\mathbf{A}/<\mathbf{e}> \simeq \mathbf{Ae'}$ est un isomorphisme de A^{op}-modules.

8. Si AeA est un idéal puits alors $\mathbf{A}/<\mathbf{e'}> \simeq \mathbf{eA}$ est un isomorphisme de A-modules.

9. Si AeA est un idéal source ou puits alors on a les isomorphismes de K-algèbres suivants

   $\mathbf{A}/<\mathbf{e}> \simeq \mathbf{e'Ae'}$ et $\mathbf{A}/<\mathbf{e'}> \simeq \mathbf{eAe}$.

Preuve. 1. Nous avons la décomposition suivante de $A_A \simeq eA \oplus e'A$ en tant que A-modules. Alors on a $(AeA)_A \simeq eAeA \oplus e'AeA$. Et puisque AeA est un idéal source, il s'ensuit que $AeA_A \simeq eA$. Par conséquent, AeA_A est un A-module projectif. Il suit du corollaire 4.3.5 que AeA est un idéal stratifiant. Le cas où l'idéal AeA est puits se montre de façon analogue en utilisant la décomposition de ${}_AA \simeq Ae \oplus Ae'$ en tant que A^{op}-modules.

2. Si AeA est un idéal source alors $e'Ae = 0$. L'énoncé suit alors directement de la remarque 4.3.15. Si $A \simeq \begin{bmatrix} e'Ae' & 0 \\ eAe' & eAe \end{bmatrix}$ alors $e'Ae = 0$.
   Par conséquent, AeA est un idéal source.

3. Supposons que AeA est un idéal source ; alors $e'Ae = 0$.
   Nous avons la décomposition suivante :

$A_A \simeq eA \oplus e'A$ alors $(AeA)_A \simeq eAeA \oplus e'AeA$. D'où $AeA_A \simeq eA$. En prenant le quotient de A par l'idéal source AeA nous obtenons le résultat escompté : $A/ < e > \simeq e'A$.

4. La démonstration est similaire à celle de 3.

5. Les énoncés $5, 6, 7$ et 8 se montrent de la même façon que $1, 2, 3$ et 4.

Enfin, pour ce qui est de l'énoncé 9 définissons l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & A/ < e > & \rightarrow & e'Ae' \\ & & a+ < e > & \mapsto & e'ae' \end{array}$$

sous l'hypothèse que AeA soit un idéal source. Nous devons montrer que celle-ci est correctement définie, de surcroît un isomorphisme de K-algèbres.

Premièrement, si $a, b \in A$ sont tels que $a+ < e >= b+ < e >$ alors $a - b \in < e >$. Ainsi $a - b = ced$ d'où $a = b + ced$ pour certains $c, d \in A$.
Par conséquent,

$$\Phi(a+ < e >) = \Phi(b + ced+ < e >) = e'(b + ced)e'$$

$= e'be' + e'cede' = e'be' = \Phi(b+ < e >)$ car AeA est un idéal source.
Ainsi Φ est une application correctement définie. D'autre part,

$$\Phi((a+ < e >)(b+ < e >)) = \Phi(ab+ < e >) = e'abe' = e'a(e + e')be' = e'ae'be'$$

car AeA est un idéal source. D'autre part,

$$\Phi((a+ < e >)(b+ < e >)) = e'ae'be' = \Phi(a+ < e >)\Phi(b+ < e >)$$

Enfin, $\Phi((1+ < e >)) = e'1e' = e'^2 = e'$.
Ceci est la preuve que Φ est un morphisme de K-algèbres. Nous montrons maintenant l'injectivité et la surjectivité de Φ.
Injectivité

Supposons que $\Phi(\mathrm{a}+ < \mathrm{e} >) = 0$. Alors $\mathrm{e'ae'} = 0$

Du coup,

$$\mathrm{a} = 1.\mathrm{a}.1 = (\mathrm{e}+\mathrm{e'})\mathrm{a}(\mathrm{e}+\mathrm{e'}) = \mathrm{eae}+\mathrm{eae'}+\mathrm{e'ae}+\mathrm{e'ae'} = \mathrm{eae}+\mathrm{eae'} = \mathrm{ea}(\mathrm{e}+\mathrm{e'})$$

$\mathrm{ea} = 1.\mathrm{e}.\mathrm{a} \in \mathrm{AeA}$ d'où $\mathrm{a}+ < \mathrm{e} >= 0+ < \mathrm{e} >$.

Surjectivité

La surjectivité est évidente, puisque si $\mathrm{e'ae'} \in \mathrm{e'Ae'}$ alors $\Phi(\mathrm{a}+ < \mathrm{e} >) = \mathrm{e'ae'}$. D'où Φ est un isomorphisme. On montre de la même façon que

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & \mathrm{A}/ < \mathrm{e'} > & \rightarrow & \mathrm{eAe} \\ & & \mathrm{a}+ < \mathrm{e'} > & \mapsto & \mathrm{eae} \end{array}$$

est un isomorphisme de K-algèbres. Sous l'hypothèse AeA puits, la preuve est analogue.

□

Theorème 4.3.17. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal source. Pour tout A-module M et N un $\mathrm{A^{op}}$-module, les énoncés suivants sont vérifiés :

1. **Me** et **Me′** ont une structure de A-modules.
2. $\mathbf{Hom_A(A/ < e >, M)} \simeq \mathbf{Me'}$ est un isomorphisme de A-modules. De plus, on a l'existence d'une suite exacte courte de A-modules $0 \rightarrow \mathrm{Me'} \rightarrow \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{Me} \rightarrow 0$. En outre, si M est un A/<e>-module (respectivement un $\mathrm{A}/ < \mathrm{e'} >$-module) alors $\mathrm{M} \simeq \mathrm{Me'}$ (respectivement $\mathrm{M} \simeq \mathrm{Me}$).
3. Si **P** est un A-module projectif alors **Pe** est un eAe-module projectif et $\mathbf{Pe} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ est un A-module projectif.
4. Si **P** est un A/<e>-module projectif alors **P** est un A-module projectif.
5. **eN** et **e′N** ont une structure de $\mathrm{A^{op}}$-modules.
6. $\mathbf{Hom_A(A/ < e' >, N)} \simeq \mathbf{eN}$ est un isomorphisme de $\mathrm{A^{op}}$-modules. De plus, on a l'existence d'une suite exacte courte $\mathrm{A^{op}}$-modules $0 \rightarrow \mathrm{eN} \rightarrow \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{e'N} \rightarrow 0$. En

outre, si N est un $(A/<e>)^{op}$-module (respectivement un $(A/<e'>)^{op}$-module) alors $N \simeq e'N$ (respectivement $N \simeq eN$).

7. Si $\mathbf{P}$ est un A^{op}-module projectif alors $\mathbf{e'P}$ est un $(e'Ae')^{op}$-module projectif et $\mathbf{Ae'} \otimes_{\mathbf{e'Ae'}} \mathbf{e'P}$ est aussi un A^{op}-module projectif.

8. Si $\mathbf{P}$ est un $(A/<e'>)^{op}$-module projectif alors $\mathbf{P}$ est un A^{op}-module projectif.

Maintenant nous sommes en mesure de prouver le théorème 4.3.17.

Preuve. 1. Il suffit de voir que $MAe'A = Me'A = Me'Ae' = Me'$. Par conséquent, Me' est un A-module.

Montrer que Me a une structure de A-module est beaucoup plus astucieux. En effet, pour tout idempotent e' nous avons le recollement suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}\ A/<e'> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ A \arrow[l, bend right, "-\otimes_A A/<e'>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_A(A/<e'>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(e'A,-)"] & \mathrm{mod}\ e'Ae'. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{e'Ae'} e'A"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{e'Ae'}(Ae',-)"] \end{tikzcd}$$

M étant un A-module, calculons son image par le foncteur $- \otimes_A A/<e'>$ alors nous obtenons le $A/<e'>$-module $M \otimes_A A/<e'>$. Puisque AeA est un idéal source alors il suit de la proposition 4.3.16 que nous avons l'isomorphisme de A^{op}-modules $A/<e'> \simeq Ae$. Par suite, nous obtenons

$$M \otimes_A A/<e'> \simeq M \otimes_A Ae \simeq Me$$

Donc Me est un $A/<e'>$-module, ce qui équivaut à dire que Me est un A-module tel que $Mee' = 0$.

2. Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que nous avons l'isomorphisme

$$A/<e> \simeq e'Ae' \simeq e'A.$$

Donc $\mathrm{Hom}_A(A/<e>, M) \simeq Me'$. La preuve de l'existence d'une suite exacte courte de A-modules $0 \to Me' \to M \to Me \to 0$ se simplifie en remarquant que $Me' \simeq MAe'A$ et donc que $M/Me' \simeq M \otimes_A A/<e'> \simeq M \otimes_A Ae \simeq Me$. La suite exacte n'est que $0 \to MI \to M \to M/MI \to 0$ où $I = Ae'A$. Puisque M est un $A/<e>$-module alors M est un A-module tel que $Me = 0$. Le module Me étant nul, il s'ensuit que $M \simeq Me'$. L'isomorphisme $M \simeq Me$ se montre de façon analogue.

3. Soit P_A un A-module projectif. Montrer que Pe est un eAe-module projectif revient à montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}_{eAe}(Pe, -)$ est exact en vertu de la définition 1.1.1. Considérons une suite exacte courte de eAe-modules $0 \to I \to J \to K \to 0$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{eAe}(Pe, -)$ à cette dernière on obtient la suite exacte longue suivante (voir proposition 1.1.4)

$$0 \to \mathrm{Hom}_{eAe}(Pe, I) \to \mathrm{Hom}_{eAe}(Pe, J) \to \mathrm{Hom}_{eAe}(Pe, K) \to \mathrm{Ext}^1_{eAe}(Pe, I) \to \cdots\cdots$$

Il reste à prouver que $\mathrm{Ext}^1_{eAe}(Pe, I) = 0$. AeA étant un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 qu'on a respectivement les isomorphismes de K-algèbres et de A^{op}-modules

$$eAe \simeq A/<e'>, \qquad A/<e'> \simeq Ae.$$

Ainsi $\mathrm{Ext}^1_{eAe}(Pe, I) \simeq \mathrm{Ext}^1_{A/<e'>}(Pe, I) \simeq \mathrm{Ext}^1_{A/<e'>}(P \otimes_A A/<e'>, I)$. Puisque $A/<e'>$ est un A^{op}-module projectif, il suit de la proposition 4.3.9 qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_{A/<e'>}(P \otimes_A A/<e'>, I) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(P, I) \ \forall\ i \geq 0.$$

En particulier, pour $i = 1$ nous avons

$$\mathrm{Ext}^1_{A/<e'>}(P \otimes_A A/<e'>, I) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(P, I) = 0$$

puisque P est un A-module projectif. Nous en déduisons que $\mathrm{Ext}^1_{eAe}(Pe, I) = 0$, ce qui prouve que Pe est un eAe-module projectif. Enfin, puisque le foncteur

$- \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ préserve les projectifs alors d'après le corollaire 4.1.6, il s'ensuit que $\mathrm{Pe} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}$ est un A-module projectif.

4. Soit P un A/<e>-module projectif. On veut montrer que P est un A-module projectif. Puisque P est un A/<e>-module et AeA un idéal source, il suit de (2) qu'on a $\mathrm{P} \simeq \mathrm{Pe}'$. Il suit également du corollaire 4.1.6 que le foncteur $- \otimes_{\mathbf{e'Ae'}} \mathbf{e'A}$ préserve les projectifs. Ainsi nous obtenons

$$\mathrm{Pe}' \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'A} \simeq \mathrm{Pe}' \simeq \mathrm{P}.$$

   En effet, nous avons la décomposition suivante en tant que $(\mathrm{e'Ae'})^{\mathrm{op}}$-modules $\mathrm{e'A} \simeq \mathrm{e'Ae'} \oplus \mathrm{e'Ae}$. Puisque AeA est un idéal source alors cet isomorphe se réduit à $\mathrm{e'A} \simeq \mathrm{e'Ae'}$.

5. Les propriétés 5, 6, 7, 8 se montrent de manière analogue à 1, 2, 3 et 4.

□

Le théorème qui suit est la version puits du théorème 4.3.17.

Theorème 4.3.18. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal puits. Pour tout A-module M et N un A^{op}-module, les énoncés suivants sont vérifiés :

1. **Me** et **Me′** ont une structure de A-modules.

2. $\mathbf{Hom_A(A/ < e' >, M) \simeq Me}$ est un isomorphisme de A-modules. De plus, on a l'existence d'une suite exacte courte de A-modules $0 \to \mathrm{Me} \to \mathrm{M} \to \mathrm{Me}' \to 0$. En outre, si M est un A/<e>-module (respectivement un $\mathrm{A}/ < \mathrm{e}' >$-module) alors $\mathrm{M} \simeq \mathrm{Me}'$ (respectivement $\mathrm{M} \simeq \mathrm{Me}$).

3. Si **P** est un A-module projectif alors **Pe′** est un e′Ae′-module projectif et $\mathbf{Pe'} \otimes_{\mathbf{e'Ae'}} \mathbf{e'A}$ est un A-module projectif.

4. Si **P** est un $\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>$-module projectif alors **P** est un A-module projectif.

5. $\mathbf{eN}$ et $\mathbf{e'N}$ ont une structure de A^{op}-modules.

6. $\mathbf{Hom_A(A/<e>,N)} \simeq \mathbf{e'N}$ est un isomorphisme de A^{op}-modules. De plus, on a l'existence d'une suite exacte courte $0 \to \mathrm{eN} \to \mathrm{N} \to \mathrm{e'N} \to 0$. En outre, si N est un $(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)^{\mathrm{op}}$-module (respectivement un $(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>)^{\mathrm{op}}$-module) alors $\mathrm{N} \simeq \mathrm{e'N}$ (respectivement $\mathrm{N} \simeq \mathrm{eN}$).

7. Si **P** est un $(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)^{\mathrm{op}}$-module projectif alors **P** est un A^{op}-module projectif.

8. Si **P** est un $(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)^{\mathrm{op}}$-module projectif alors **P** est un A^{op}-module projectif.

Preuve. La preuve est similaire à celle du théorème précédent. □

4.4 Restriction aux modules de Cohen-Macaulay

Notre objectif est de montrer que lorsque nous nous restreignons aux catégories de modules maximaux de Cohen-Macaulay nous avons le recollement suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CM}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{CM}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{CM}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

sous certaines hypothèses. Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous aimerions attirer l'attention du lecteur que nous ne définirons pas la notion de module de Cohen-Macaulay dans le cas général. En effet, cela nécessite de définir plusieurs notions et ce n'est pas l'objet de notre thèse, elles peuvent être trouvées dans [62]. La restriction du recollement des catégories de modules aux catégories de modules de Cohen-Macaulay n'est pas une mince affaire. En effet, pour obtenir un tel diagramme on a besoin de conditions supplémentaires. Rappelons qu'une algèbre A est de Gorenstein si elle est à la fois noethérienne à gauche et à droite et de dimension injective finie en tant que A-module et

A^{op}-module. Lorsque la K-algèbre A est de Gorenstein, Buchweitz [18] définit un module de Cohen-Macaulay comme suit :

$$\mathrm{CM(A)} = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{modA} \mid \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}) = 0 \ \text{ pour tout } \ \mathrm{i} \geq 1\right\}$$

Toutefois, même si les trois algèbres A, A/<e> et eAe sont de Gorenstein cela n'impliquerait pas forcément que les six foncteurs intervenant dans le recollement de Cline, Parshall et Scott préservent les modules maximaux de Cohen-Macaulay. Dans la sous-section qui suit nous donnerons six exemples à titre illustratif et montrons dans chacun des cas que les trois K-algèbres sont de Gorenstein et pourtant ces foncteurs ne préservent pas les modules de Cohen-Macaulay.

4.4.1 Exemples illustratifs

Nous commençons par définir une notion importante sur laquelle repose tous nos résultats en l'occurrence les algèbres **d'Iwanaga-Gorenstein** ou plus brièvement dites de **Gorenstein**.

Définition 4.4.1 ([8, 7]). Une K-algèbre A est dite de **Gorenstein** si A est à la fois noethérienne à gauche et à droite, $\mathrm{di}(\mathrm{A}_{\mathrm{A}}) < \infty$ et $\mathrm{di}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}) < \infty$.

Définition 4.4.2 ([63]). Une K-algèbre A est dite **n-Gorenstein** si A est à la fois noethérienne à gauche et à droite, $\mathrm{di}(\mathrm{A}_{\mathrm{A}}) \leq \mathrm{n}$ et $\mathrm{di}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}) \leq \mathrm{n}$.

Puisque qu'on a défini les algèbres n-Gorenstein, nous aimerions présenter dans ce qui suit les algèbres inclinées amassées qui sont des algèbres 1-Gorenstein.

Définition 4.4.3 ([39]). Soient H une K-algèbre héréditaire et $\mathrm{F} = \tau^{-1}[1]$.
La catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{H}} = \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{modH})/\mathrm{F}$ est appelée **catégorie amassée.**

[1] représente le foncteur de translation dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{modH})$.

Définition 4.4.4. Un objet T de $\mathcal{C}_H$ est dit **incliné-amassé**, si et seulement si pour tout X dans $\mathcal{C}_H$ l'égalité suivante est valable : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_H}(T, X[1]) = 0$ si et seulement si $X \in$ **addT**, où **addT** est la sous-catégorie dont les objets sont les sommes directes finies des facteurs directs de T.

Proposition 4.4.5 ([16])**.** Soient $H = KQ$, T un objet de la catégorie amassée $\mathcal{C}_H$ et n le nombre de points du carquois Q associé à l'algèbre héréditaire H. Alors T est un **objet inclinant**, si

1. $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_H}(T, T) = 0$
2. T possède n facteurs directs non isomorphes.

Définition 4.4.6 ([16])**.** Soit T un objet inclinant de la catégorie amassée $\mathcal{C}_H$. L'algèbre **inclinée-amassée** associée à l'objet T, notée $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_H}(T)^{op}$, est l'algèbre opposée des endomorphismes de T sur $\mathcal{C}_H$.

Lemme 4.4.7 ([39])**.** Les algébres inclinées-amassées sont 1-Gorenstein.

Remarque 4.4.8. Les K-algèbres auto-injectives sont 0-Gorenstein.

Exemple 4.4.9. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié $A = KQ/I$ où

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

et

$$I = < \alpha\beta; \beta\gamma; \gamma\alpha > .$$

A est auto-injective, donc 0-Gorenstein, mais de dimension globale infinie.

Exemple 4.4.10. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié $A = KQ/I$ où

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3$$

et $I = < \alpha_1\alpha_2 >$.La dimension globale de A est 2, donc A est 2-Gorenstein.

Exemple 4.4.11. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié A = KQ/I où

$$Q = \begin{tikzcd} 2 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[rr, "\beta"] & & 1 \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

et

$$\mathrm{I} =< \alpha^2; \gamma^2; \alpha\beta - \beta\gamma > .$$

Alors A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension globale infinie qui n'est pas auto-injective. En effet, on peut vérifier aisément que $\mathrm{di}(\mathrm{A}_\mathrm{A}) = 1 = \mathrm{di}({}_\mathrm{A}\mathrm{A})$.

Les exemples qui suivent ont pour but de montrer que la préservation des modules de Cohen-Macaulay par les six foncteurs du recollement de Cline, Parshall et Scott n'est pas toujours vérifiée dans un contexte où les K-algèbres A, A/<e> et eAe sont toutes de Gorenstein.

Exemple 4.4.12. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié $\mathrm{A} = \mathrm{KQ/I}$ où

$$\mathrm{Q} = 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} 5 \xrightarrow{\alpha_5} 6$$

et

$$\mathrm{I} = <\alpha_1\alpha_2; \alpha_2\alpha_3; \alpha_3\alpha_4; \alpha_4\alpha_5> .$$

Considérons le foncteur $\mathbf{Hom_A(eA, -)} : \mathbf{modA} \to \mathbf{modeAe}$, où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_3 + \mathrm{e}_4$.
La dimension globale de A est 5. Donc A est 5-Gorenstein. Les K-algèbres de chemins eAe et A/<e> sont données par les carquois ci-dessous :

$$\mathrm{Q_C} = \mathrm{Q_{eAe}} = \ 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4$$

$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q_{A/<e>}} = \ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \qquad 5 \xrightarrow{\alpha_5} 6.$$

Les algèbres B et C sont de Gorenstein, en effet elles sont héréditaires. Nous savons que **A** est un A-module de Cohen-Macaulay. Son image par le foncteur $\mathbf{Hom_A(eA, -)}$ donne le module **Ae**. Il reste à vérifier si ce dernier est un eAe-module de Cohen-Macaulay ou non. Nous avons la décomposition suivante en tant que eAe-modules

$$\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe} \oplus (1 - \mathrm{e})\mathrm{Ae} = \mathrm{eAe} \oplus (\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_5 + \mathrm{e}_6)\mathrm{A}(\mathrm{e}_3 + \mathrm{e}_4)$$

Ainsi $\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe} \oplus \mathrm{e_2Ae_3}$. Étant donné que $\mathrm{e_2Ae_3}$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 non nul, nous en déduisons que $\mathrm{e_2Ae_3}$ est isomorphe au simple en 3, autrement dit $\mathrm{e_2Ae_3} \simeq \mathrm{S_3}$ en tant que eAe-modules. Or,

$$\mathrm{eAe} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \oplus \ 4 \ .$$

Nous avons

$$\mathrm{Ext^i_{eAe}(Ae, eAe)} \simeq \mathrm{Ext^i_{eAe}(eAe \oplus S_3, eAe)} \simeq \mathrm{Ext^i_{eAe}}\left(3 \ , \ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \oplus 4\right) \simeq \mathrm{Ext^i_{eAe}}(3, 4) \ \ \forall \ \ \mathrm{i} \geq 1$$

On vérifie aisément que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(4,4) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{eAe}}(3,\ \ 4\ \ ) \neq 0.$$

Donc

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},\mathrm{eAe}) \neq 0.$$

Conclusion 4.4.13. À travers cet exemple, nous voyons bien que A est un A-module de Cohen-Macaulay, cependant son image par le foncteur $\mathbf{Hom_A(eA,-)}$ n'est pas un eAe-module de Cohen-Macaulay.

À présent, passons à un autre foncteur.

Exemple 4.4.14. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié A = KQ/I où

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

et I =< $\beta\alpha$ >. Représentons ci-dessous les A-modules projectifs

$$\mathrm{P}_1^{\mathrm{A}} = \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array},\ \mathrm{P}_2^{\mathrm{A}} = \begin{array}{c}2\\1\end{array}.$$

Les résolutions projectives des A-modules simples sont :

$$0 \to \begin{array}{c}2\\1\end{array} \to \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array} \to 1 \to 0$$

$$0 \to \begin{array}{c}2\\1\end{array} \to \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array} \to \begin{array}{c}2\\1\end{array} \to 2 \to 0.$$

Ainsi la dimension globale de A est 2 donc A est 2-Gorenstein.

Considérons le foncteur $- \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA} : \mathbf{modeAe} \to \mathbf{modA}$ où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1$.

La K-algèbre de carquois lié $\mathrm{C} = \mathrm{eAe} = \mathrm{KQ_C/J}$ où le carquois $\mathrm{Q_C}$ est représenté ci-dessous

$$\mathrm{Q_C} = \mathrm{Q_{eAe}} = \delta \circlearrowright 1$$

et J =< δ^2 > avec $\delta = \alpha\beta$. Il en est de même pour la K-algèbre de chemins A/<e> donnée par le carquois

$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q_{A/<e>}} = \quad \bullet 2.$$

B et C sont de Gorenstein, en effet, elles sont respectivement semi-simple et auto-injective. Le simple $\mathbf{S_1}$ est un eAe-module de Cohen-Macaulay car eAe est auto-injective. Vérifions si son image par le foncteur $-\otimes_{\mathbf{eAe}}, \mathbf{eA}$ en l'occurrence le module $\mathbf{S_1} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$, est un A-module de Cohen-Macaulay ou non. Nous avons la décomposition suivante en tant que eAe-modules :

$$\mathrm{S_1} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \simeq \mathrm{S_1} \otimes_{\mathrm{eAe}} (\mathrm{eAe} \oplus \mathrm{eAe_2}) \simeq \mathrm{S_1} \oplus \mathrm{S_1} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eAe_2}$$

Évaluons

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S_1}, \mathrm{A}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}\left(1 \ , \ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}\left(1 \ , \ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right) \ \text{ pour tout } \ \mathrm{i} \geq 1$$

Or

$$\mathrm{Ext}^{1}_{\mathrm{A}}\left(1 \ , \ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right) \neq 0$$

car la suite exacte

$$0 \to \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \to 1 \to 0$$

n'est pas scindée dans modA. Donc $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{S_1}, \mathrm{A}) \neq 0$. Par conséquent, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{S_1} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{A}) \neq 0$.

Conclusion 4.4.15. Dans cet exemple, $\mathrm{S_1}$ est un eAe-module de Cohen-Macaulay, toutefois son image par le foncteur $- \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ n'est pas un A-module de Cohen-Macaulay.

Nous passons au foncteur suivant.

Exemple 4.4.16. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié $\mathrm{A} = \mathrm{KQ}/\mathrm{I}$ où

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

et $\mathrm{I} =< \beta\alpha >$. Il suit de l'exemple 4.4.14 que la dimension globale de A est 2 donc A est 2-Gorenstein. Considérons le foncteur $\mathbf{Hom_{eAe}}(\mathbf{Ae}, -) : \mathbf{modeAe} \to \mathbf{modA}$ où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1$. La K-algèbre de carquois lié $\mathrm{C} = \mathrm{eAe} = \mathrm{KQ_C}/\mathrm{J}$ donnée par le carquois

$$\mathrm{Q_C} = \mathrm{Q_{eAe}} = \ _{\delta}\circlearrowright 1$$

où $\mathrm{J} =< \delta^2 >$ avec $\delta = \alpha\beta$. Il en est de même pour la K-algèbre de chemins A/<e> donnée par le carquois

$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q_{A/<e>}} = \qquad \bullet 2.$$

B et C sont de Gorenstein, en effet, elles sont respectivement semi-simple et auto-injective. $\mathbf{S_1}$ est un eAe-module de Cohen-Macaulay car eAe est auto-injective. Vérifions si son image par le foncteur $\mathbf{Hom_{eAe}}(\mathbf{Ae}, -)$ en l'occurrence le module $\mathbf{Hom_{eAe}}(\mathbf{Ae}, \mathbf{S_1})$, est un A-module de Cohen-Macaulay ou non. Nous avons la décomposition suivante en tant que eAe-modules :

$$\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe} \oplus (1 - \mathrm{e})\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe} \oplus \mathrm{e_2Ae_1}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Hom_{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{S_1}) \simeq \mathrm{Hom_{eAe}}(\mathrm{eAe}, \mathrm{S_1}) \oplus \mathrm{Hom_{eAe}}(\mathrm{S_1}, \mathrm{S_1}) \simeq \mathrm{S_1} \oplus \mathrm{Hom_{eAe}}(\mathrm{S_1}, \mathrm{S_1})$$

Évaluons l'expression ci-dessous :

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S}_1, \mathrm{A}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}\left(\ 1\ ,\ \begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix} \oplus \begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}\left(\ 1\ ,\ \begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right) \ \text{ pour tout } \ \mathrm{i} \geq 1$$

Or

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}\left(\ 1\ ,\ \begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right) \neq 0$$

car la suite exacte

$$0 \to \begin{matrix}2\\1\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix} \to 1 \to 0$$

n'est pas scindée dans modA. Donc $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{S}_1, \mathrm{A}) \neq 0$, par conséquent,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{S}_1), \mathrm{A}) \neq 0.$$

Conclusion 4.4.17. Dans cet exemple, S_1 est un eAe-module de Cohen-Macaulay, toutefois son image par le foncteur $\mathbf{Hom_{eAe}}(\mathbf{Ae}, -)$, n'est pas un A-module de Cohen-Macaulay.

Passons au foncteur suivant.

Exemple 4.4.18. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié $\mathrm{A} = \mathrm{KQ/I}$ où

$$\mathrm{Q} = 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} 5$$

et

$$\mathrm{I} =< \alpha_1\alpha_2; \alpha_2\alpha_3; \alpha_3\alpha_4 > .$$

La dimension globale de A est 4. Donc A est 4-Gorenstein. Considérons le foncteur **inc** : $\mathbf{modA}/ < \mathbf{e} > \to \mathbf{modA}$, où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_3 + \mathrm{e}_4$.
Les K-algèbres de chemins eAe et $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ sont données par les carquois ci-dessous :

$$\mathrm{Q_C} = \mathrm{Q_{eAe}} = \ 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4$$

$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q_{A/<e>}} = \ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \qquad 5$$

Les K-algèbres B et C sont de Gorenstein. En effet, elles sont héréditaires. $\mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ est un $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$-module de Cohen-Macaulay. Vérifions si son image par le foncteur d'inclusion **inc**, le module $\mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ lui-même est un A-module de Cohen-Macaulay ou non. Évaluons l'expression ci-dessous :

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{A}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}\Big(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \ 5 \ , \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \oplus 5\Big) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\ 2 \ , \ 5 \ ) \ \forall \ \mathrm{i} \geq 1$$

On vérifie aisément que

$$\mathrm{Ext}^3_{\mathrm{A}}(\ 2 \ , \ 5 \ ) \neq 0.$$

Conclusion 4.4.19. À travers cet exemple, nous voyons bien que $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ est un $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$-module de Cohen-Macaulay, toutefois son image par le foncteur d'inclusion **inc** n'est pas un A-module de Cohen-Macaulay.

Passons au foncteur suivant

Exemple 4.4.20. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié $\mathrm{A} = \mathrm{KQ}/\mathrm{I}$ où

$$\mathrm{Q} = 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3$$

et $\mathrm{I} = <\alpha_1\alpha_2>$.La dimension globale de A est 2 donc A est 2-Gorenstein.
Considérons le foncteur $\mathbf{Hom_A(A/<e>,-) : modA \to modA/<e>}$ où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_3$.
Les K-algèbres de chemins eAe et A/<e> sont données par les carquois ci-dessous :

$$\mathrm{C} = \mathrm{eAe} = \qquad \bullet 3$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}/<\mathrm{e}> = \; 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2$$

Les K-algèbres B et C sont de Gorenstein. En effet, elles sont héréditaires. **A** est un A-module de Cohen-Macaulay. Vérifions si son image par le foncteur $\mathbf{Hom_A(A/<e>,-)}$ représenté par le module $\mathbf{Hom_A(A/<e>,A)}$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay ou non.

$$\mathrm{Hom_A}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{A}) = \mathrm{Hom_A}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2, \; \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \oplus \; 3 \right)$$

Intéressons-nous au module suivant :

$$\mathrm{Hom_A}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}, \; \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \right) \simeq \mathrm{Hom_A}(\mathrm{e_1A}, \mathrm{e_1A}) \simeq \mathrm{e_1Ae_1} \simeq \mathrm{S_1}$$

Évaluons l'expression ci-dessous :

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{S_1}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}\left(1 \;, \; \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \; 2 \right) \;\; \forall \;\; \mathrm{i} \geq 1$$

On vérifie aisément que

$$\mathrm{Ext}^{1}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\; 1 \;, \; 2 \;) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(2,2) \neq 0.$$

Conclusion 4.4.21. À travers cet exemple, nous constatons que A est un A-module de Cohen-Macaulay, cependant son image par le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, -)$ n'est pas un A/<e>-module de Cohen-Macaulay.

Passons au dernier foncteur.

Exemple 4.4.22. Considérons le carquois Q représenté ci-dessous et l'algèbre de carquois lié $\mathrm{A} = \mathrm{KQ/I}$ où

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

et

$$\mathrm{I} =< \alpha\beta; \beta\gamma; \gamma\alpha > .$$

Considérons le foncteur $- \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} > : \mathbf{modA} \to \mathbf{modA}/ < \mathbf{e} >$ où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_3$
A étant auto-injective alors on en déduit que $\mathbf{S_1}$ est un A-module de Cohen-Macaulay. Les K-algèbres de chemins eAe et A/<e> sont données par les carquois ci-dessous :

$$\mathrm{C} = \mathrm{eAe} = \quad \bullet 3$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > = \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Les K-algèbres B et C sont de Gorenstein. En effet, elles sont héréditaires. $\mathbf{S_1}$ est un A-module de Cohen-Macaulay. Vérifions si son image par le foncteur $- \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ représentée par le module $\mathbf{S_1} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay ou non. Pour tout A-module M, il suit du corollaire 4.1.6 qu'il existe un A-module N tel qu'on ait la suite exacte suivante

$$0 \to \mathrm{N} \to \mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \to \mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to 0$$

Si $\mathrm{M} = \mathrm{S}_1$ alors $\mathrm{Me} = 0$.
Puisque $\mathrm{e} = \mathrm{e}_3$ alors notre suite exacte ci-dessus devient

$$0 \to \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to 0$$

Donc nous en déduisons que $\mathrm{S}_1 \simeq \mathrm{S}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >$. Par conséquent,

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{B}}(\mathrm{S}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{B}}(\ S_1\ ,\ \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{B}}(\ 1\ ,\ \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \oplus 2)\ \ \forall\ \ \mathrm{i} \geq 1.$$

Ce qui implique que

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{B}}(\mathrm{S}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{B}}(\ 1\ ,\ 2\ )\ \ \forall\ \ \mathrm{i} \geq 1.$$

On vérifie aisément que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\ 1\ ,\ 2\ ) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(2, 2) \neq 0.$$

Conclusion 4.4.23. Dans cet exemple, nous voyons bien que $\mathbf{S_1}$ est un A-module de Cohen-Macaulay, toutefois son image par le foncteur $-\otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ n'est pas un A/<e>-module de Cohen-Macaulay.

Globalement aucun foncteur ne préserve la propriété.

Pour couronner le tout, nous avons jugé pertinent de donner un dernier exemple dans lequel nous présentons une K-algèbre A qui n'est pas de Gorenstein tandis que les K-algèbres eAe et A/<e> sont de Gorenstein.

Exemple 4.4.24. Soit A une K-algèbre de chemins munie de la relation ci-contre

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd} \qquad \beta\alpha\beta=0.$$

Alors A n'est pas de Gorenstein. En effet, nous avons les A-modules projectifs et injectifs représentés ci-contre

$$P_1 = \begin{array}{c}1\\2\\1\\2\end{array}, \; P_2 = \begin{array}{c}2\\1\\2\end{array}, \; I_1 = \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array}, \; I_2 = \begin{array}{c}1\\2\\1\\2\end{array}$$

$$A_A = \begin{array}{c}1\\2\\1\\2\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\1\\2\end{array}$$

Pour montrer que A n'est pas de Gorenstein, il suffit de prouver que la dimension injective de A_A n'est pas finie. Pour ce faire calculons une résolution injective de P_2. Ainsi nous obtenons la résolution injective infinie

$$0 \to P_2 \to I_2 \to I_1 \to I_2 \to I_2 \to I_2 \to \cdots\cdots$$

Nous voyons que la dimension injective de A_A est infinie. Par conséquent, A n'est pas de Gorenstein.

Posons $e = e_1$. Alors les K-algèbres de chemins eAe et A/<e> sont données par les carquois ci-dessous :

$$Q_C = Q_{eAe} = \delta \circlearrowright 1$$

où $\delta = \alpha\beta$ avec $\delta^2 = 0$ et

$$Q_B = Q_{A/<e>} = \quad \bullet 2$$

Puisque les algèbres sont respectivement auto-injective et semisimple, elles sont de Gorenstein.

Conclusion 4.4.25. Comme nous pouvons le voir à travers cet exemple A n'est pas de Gorenstein. Cependant eAe et A/<e> sont des K-algèbres de Gorenstein.

Nous venons de voir à travers ces exemples que les six foncteurs qui composent le recollement défini par Cline, Parshall et Scott ne préservent pas les modules de Cohen-Macaulay en général, et ce même lorsque les K-algèbres eAe et A/<e> sont toutes de Gorenstein . Toutefois, il est prouvé dans le dernier exemple que les trois K-algèbres A, eAe et A/<e> ne sont pas toujours de Gorenstein. Tenir compte de toutes ces considérations nous pousse à fixer des hypothèses supplémentaires afin d'arriver au but fixé en l'occurrence le recollement sur les modules de Cohen-Macaulay énoncé dans l'introduction.

4.4.2 Premiers résultats

Dans cette section nous présentons nos premiers résultats. Puisque la préservation des modules de Cohen-Macaulay par ces foncteurs nécessite beaucoup de propriétés et notions à définir, nous avons jugé pertinent d'établir des propositions pour les six foncteurs respectifs. Nous établirons plus tard un cadre permettant d'obtenir ce recollement.

Proposition 4.4.26. Soient A une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal stratifiant, $\mathrm{dp}(Ae)_{eAe} < \infty$ et $\mathrm{dp}_{eAe}(eA) < \infty$.

Si **M** est un eAe-module de Cohen-Macaulay alors $\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ est un A-module de Cohen-Macaulay.

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin d'énoncer quelques résultats. Les théorèmes, propositions, lemmes et définitions qui suivent sont indispensables pour la preuve.

Définition 4.4.27 ([11]). Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ des catégories triangulées

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, "i"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "e"] & \mathcal{C}'' \arrow[l, bend right, "l"'] \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

Le diagramme ci-dessus noté par la suite $\mathbf{R}(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}'')$ est un recollement de $\mathcal{C}$ relatif à $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

(R1) (q, i), (i, p), (l, e) et (e, r) sont des paires de foncteurs adjoints.

(R2) i, l et r sont fidèles et pleins.

(R3) $ei = 0$.

(R4) Pour tout objet $X \in \mathcal{C}$ les unités et les counités donnent des triangles distingués : $leX \to X \to iqX \to leX[1]$, et $ipX \to X \to reX \to ipX[1]$

Proposition 4.4.28 ([22]). Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal stratifiant. Nous avons le recollement suivant de catégories dérivées :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}(A/<e>) \arrow[r, "f_*"] & \mathscr{D}(A) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{L}_{A} A/<e>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(A/<e>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(eA,-)"] & \mathscr{D}(eAe) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{L}_{eAe} eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"] \end{tikzcd}$$

où $f_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/<e>, -)$

Pour tout $X \in \mathscr{D}(A)$ nous avons les triangles suivants :

— $Xe \otimes^{L}_{eAe} eA \to X \to f_*(X \otimes^{L}_{A} A/<e>) \to Xe \otimes^{L}_{eAe} eA[1]$

— $f_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(A/<e>, X)) \to X \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, Xe) \to f_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(A/<e>, X))[1]$

Theorème 4.4.29 ([50])**.** Soient A, B et C des K-algèbres de dimension finie. Supposons qu'il existe un recollement sur les catégories dérivées bornées

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{B}) \arrow[r] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] \arrow[r] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{C}). \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Si A est de Gorenstein alors B et C le sont aussi.

La proposition qui suit est d'une importance capitale tout au long de la thèse. En effet, elle nous simplifie considérablement la tâche tout au long de ce manuscrit.

Proposition 4.4.30. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal stratifiant. Pour tous A-modules $\mathrm{M_A}$ et $\mathrm{_AN}$ les isomorphismes fonctoriels suivants sont vérifiés

1. $\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{n+1}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{n} \geq 1$
2. $\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathrm{eAe}}_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{Me}, \mathrm{eA})$ pour tout $\mathrm{n} \geq 1$
3. $\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}, \mathrm{eN}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{n+1}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{N})$ pour tout $\mathrm{n} \geq 1$
4. $\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathrm{eAe}}_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{eN})$ pour tout $\mathrm{n} \geq 1$

Preuve. 1. Puisque AeA est un idéal stratifiant, il suit de la proposition 4.4.28 que nous avons le recollement suivant de catégories dérivées

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathscr{D}(\mathrm{eAe}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"] \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{f}_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, -)$

De plus nous avons le triangle suivant

$$\mathrm{f}_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{M})) \to \mathrm{M} \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \to \mathrm{f}_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{M}))[1]$$

En appliquant le foncteur de cohomologie H à ce triangle (voir définition 1.2.3) nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^{n}(f_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(A/<e>, M))) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n}(M) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n}(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, Me)) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
\mathrm{H}^{n+1}(f_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(A/<e>, M))) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n+1}(M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

M étant un complexe concentré en degré 0 alors $\mathrm{H}^{n}(M) = 0 \quad$ pour tout $\; n \geq 1$.
Ainsi, $\mathrm{H}^{n}(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, Me)) \simeq \mathrm{H}^{n+1}(f_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(A/<e>, M)))$ pour tout $n \geq 1$.
Puisque Ae et Me appartiennent à ModA, il suit de la définition 1.4.1 que

$$\mathrm{H}^{n}(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, Me)) \simeq \mathrm{Ext}^{n}_{eAe}(Ae, Me)$$

Pour tout A/<e>-module L on a l'isomorphisme

$$f_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/<e>, L)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/<e>, L)) \simeq L$$

Il s'ensuit que $\mathrm{H}^{n+1}(f_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(A/<e>, M))) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}_{A}(A/<e>, M)$.
D'où $\mathrm{Ext}^{n}_{eAe}(Ae, Me) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}_{A}(A/<e>, M)$ pour tout $n \geq 1$

2. En vertu de la proposition 4.4.28 nous avons le triangle suivant

$$Me \otimes^{L}_{eAe} eA \to M \to f_*(M \otimes^{L}_{A} A/<e>) \to Me \otimes^{L}_{eAe} eA[1]$$

Appliquons le foncteur de cohomologie H à ce triangle. Nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_{n}(Me \otimes^{L}_{eAe} eA) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n}(M) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n}(f_*(M \otimes^{L}_{A} A/<e>)) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
\mathrm{H}_{n+1}(Me \otimes^{L}_{eAe} eA) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

M étant un complexe concentré en degré 0 alors $H_n(M) = 0$ pour tout $n \geq 1$. D'où

$$H_n(f_*(M \otimes^L_A A/ < e >)) \simeq H_{n+1}(Me \otimes^L_{eAe} eA) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Pour tout A-module M nous avons :

$$H_n(f_*(M \otimes^L_A A/ < e >)) \simeq H_n(M \otimes^L_A A/ < e >) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

$H_{n+1}(Me \otimes^L_{eAe} eA) \simeq H_{n+1}(Me \otimes^L_{eAe} eA)$ pour tout $n \geq 1$. Or

$$H_n(M \otimes^L_A A/ < e >) \simeq \mathrm{Tor}^A_n(M, A/ < e >).$$

De même $H_{n+1}(Me \otimes^L_{eAe} eA) \simeq \mathrm{Tor}^{eAe}_{n+1}(Me, eA)$.
Par conséquent, $\mathrm{Tor}^A_n(M, A/ < e >) \simeq \mathrm{Tor}^{eAe}_{n+1}(Me, eA)$ pour tout $n \geq 1$.
Pour tout A^{op}-module ${}_AN$, les deux dernières propriétés se montrent de façon semblable aux deux premières en utilisant le recollement sur les A^{op}-modules.

□

Proposition 4.4.31 ([19])**.** Soients $\Phi : A \to B$ un morphisme de K-algèbres, M_A un A-module, ${}_AN_B$ un (A-B)-bimodule et I_B un B-module injectif. Pour tout $i \geq 0$ on a des isomorphismes fonctoriels

$$\Psi : \mathrm{Ext}^i_A(M, \mathrm{Hom}_B(N, I)) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Tor}^A_i(M, N), I).$$

Theorème 4.4.32 ([47])**.** Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathscr{D}^b(A/ < e >) \arrow[r, "f_*"] & \mathscr{D}^b(A) \arrow[l, bend right, "-\otimes^L_A A/<e>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(A/<e>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(eA,-)"] & \mathscr{D}^b(eAe) \arrow[l, bend right, "-\otimes^L_{eAe} eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"]
\end{tikzcd}$$

où $f_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/ < e >, -)$, est un recollement.

2. $\mathrm{Tor}_i^A(AeA, AeA) = 0 \ \forall \ i \ \geq 1, AeA \otimes_A AeA \simeq AeA$ et $\mathrm{dp}({}_A AeA_A) < \infty$.

3. AeA est un idéal stratifiant et $\mathrm{dp}(Ae_{eAe}) < \infty$, $\mathrm{dp}({}_{eAe}eA) < \infty$.

Définition 4.4.33 ([26, 27])**.** Soit A une K-algèbre de dimension finie. Un A-module M est dit **Gorenstein-projectif** s'il existe une suite exacte de A-modules projectifs de la forme

$$P^* = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to P^2 \to P^3 \to P^4 \to \cdots$$

telle que $M \simeq \mathrm{Im}(P_0 \to P^0)$ et $\mathrm{Hom}_A(P^*, Q)$ est exact pour tout A-module projectif Q.

Notons $A - \mathcal{GP}$ la sous-catégorie de modA des A-modules Gorenstein-projectifs.

Lemme 4.4.34 ([18])**.** Les modules **Gorenstein-projectifs** sont projectifs ou de dimension projective infinie.

Proposition 4.4.35 ([27, 21, 12])**.** Soit A une K-algèbre de dimension finie.

1. Nous avons $\mathbf{A} - \mathcal{GP} \subseteq {}^{\perp}\mathbf{A} = \left\{\mathbf{M} \in \mathbf{mod}(\mathbf{A}) \mid \mathbf{Ext}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}, \mathbf{A}) = \mathbf{0} \ \ \forall \ \ \mathbf{i} \geq 1\right\}$
2. Si $\mathbf{dgl}(\mathbf{A}) < \infty$ alors nous avons $\mathbf{A} - \mathcal{GP} = \mathcal{P}\mathbf{roj}(\mathbf{A})$ où $\mathcal{P}\mathbf{roj}(\mathbf{A})$ est la catégorie des A-modules projectifs.
3. Si **A est auto-injective** alors nous avons $\mathbf{A} - \mathcal{GP} = \mathbf{modA}$.
4. Si **A est Gorenstein** alors nous avons $\mathbf{A} - \mathcal{GP} = {}^{\perp}\mathbf{A} = \mathbf{CM}(\mathbf{A})$.

Lemme 4.4.36 ([64])**.** Soit A une K-algèbre de dimension finie. Si M est un A-module Gorenstein-projectif et X un A^{op}-module tels que $\mathrm{dp}({}_A X) < \infty$ alors

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, X) = 0 \ \text{ pour tout } \ i \ \geq 1.$$

Lemme 4.4.37 ([38])**.** Soient A une K-algèbre de dimension finie et $M \in {}^{\perp}\mathbf{A}$. Pour tout A-module N_A, si $\mathrm{dp}(N_A) < \infty$, alors $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 4.4.26.

Preuve. [**Proposition 4.4.26**] Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et AeA un idéal stratifiant tels que $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$, $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$, alors il suit du théorème 4.4.32 que nous avons le recollement de catégories dérivées bornées

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathsf{RHom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathsf{RHom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathsf{RHom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"] \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{f}_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)$.

Puisque A est une K-algèbre de dimension finie alors eAe et A/<e> le sont aussi. En vertu du théorème 4.4.29, les K-algèbres A/<e> et eAe sont de Gorenstein. Soit M un eAe-module de Cohen-Macaulay. Nous voulons montrer que $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}$ est un A-module de Cohen-Macaulay, ce qui équivaut à dire que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{A}) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$.

D'après le corollaire 4.1.8 si $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{I}) = 0$ pour tout A/<e>-module injectif I et $\mathrm{i} \geq 0$ alors on a $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{A}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{M},\mathrm{Ae})$. Montrons que

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{I}) = 0 \text{ pour tout } \mathrm{I}\in\mathrm{Inj}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \text{ et } \mathrm{i}\geq 0.$$

Pour $\mathrm{i} = 0$, l'adjonction 1.1.10 nous permet d'obtenir

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{I}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{M},\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},\mathrm{I})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{Ie}) = 0.$$

En effet, I est un A/<e>-module donc il s'ensuit que $\mathrm{Ie} = 0$. Il reste à montrer que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{I}) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. On a

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{I}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{I})) \text{ pour tout } \mathrm{i}\geq 1.$$

Puisque I est un A/<e>-module injectif alors il suit de la proposition 4.4.31 qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{I})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA},\mathrm{A}/<\mathrm{e}>),\mathrm{I})$$

pour tout $i \geq 1$. Puisque AeA est un idéal stratifiant, alors la proposition 4.4.30 nous permet d'obtenir l'sisomorphisme

$$\mathrm{Tor}_i^A(M \otimes_{eAe} eA, A/<e>) \simeq \mathrm{Tor}_{i+1}^{eAe}(M, eA) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Ainsi nous avons $\mathrm{Ext}_A^i(M \otimes_{eAe} eA, I) \simeq \mathrm{Hom}_{A/<e>}(\mathrm{Tor}_{i+1}^{eAe}(M, eA), I)$ pour tout $i \geq 1$. D'autre part, puisque eAe est Gorenstein, la proposition 4.4.35 permet d'établir que $eAe - \mathcal{GP} = {}^{\perp}eAe = CM(eAe)$. Ainsi M est un eAe-module Gorenstein-projectif. De plus, puisque $dp({}_{eAe}eA) < \infty$ par hypothèse, il suit du lemme 4.4.36 que $\mathrm{Tor}_i^{eAe}(M, eA) = 0$ pour tout $i \geq 1$ d'où $\mathrm{Tor}_{i+1}^{eAe}(M, eA) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Par conséquent

$$\mathrm{Ext}_A^i(M \otimes_{eAe} eA, I) = 0 \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Ainsi $\mathrm{Ext}_A^i(M \otimes_{eAe} eA, I) = 0$ pour tout $i \geq 0$ et I un A/<e>-module injectif alors $\mathrm{Ext}_A^i(M \otimes_{eAe} eA, A) \simeq \mathrm{Ext}_{eAe}^i(M, Ae)$. En particulier

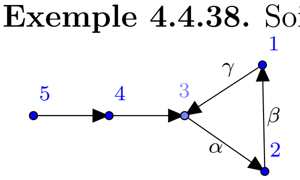
$$\mathrm{Ext}_A^i(M \otimes_{eAe} eA, A) \simeq \mathrm{Ext}_{eAe}^i(M, Ae) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Maintenant, puisque M est un eAe-module de Cohen-Macaulay et $dp(Ae_{eAe}) < \infty$, il suit du lemme 4.4.37 que $\mathrm{Ext}_{eAe}^i(M, Ae) = 0$ pour tout $i \geq 1$. D'où

$$\mathrm{Ext}_A^i(M \otimes_{eAe} eA, A) = 0 \quad \text{pour tout } \; i \geq 1$$

ce qui montre que $M \otimes_{eAe} eA$ est un A-module de Cohen-Macaulay. □

Exemple 4.4.38. Soit A la K-algèbre de chemins munie des relations ci-contre



$\alpha\beta = 0 = \beta\gamma = \gamma\alpha.$

Posons $e = e_4 + e_5$. Puisque AeA est un idéal source, alors il suit de la proposition 4.3.16

que AeA est un idéal stratifiant. De plus, A est inclinée-amassée alors il suit du lemme 4.4.7 que A est 1-Gorenstein. La K-algèbre de carquois C = eAe est représentée ci-dessous

$$\mathrm{Q_C} = \mathrm{Q_{eAe}} = 5 \to 4.$$

Puisque C est héréditaire alors $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae}_{\mathrm{eAe}}) < \infty$ et $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}) < \infty$. Le module $\mathbf{L} = \mathbf{S_4}$ est un eAe-module projectif donc de Cohen-Macaulay. Les hypothèses de la proposition étant satisfaites, alors $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ est un A-module de Cohen-Macaulay.

Proposition 4.4.39. Soient A une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et e un idempotent tels que AeA soit un idéal stratifiant. Supposons que $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$ et $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$. Si $\mathbf{M}$ est un A-module de Cohen-Macaulay tel que $\mathbf{Hom_A}(\mathbf{M}, \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ pour tout A/<e>-module injectif I alors **Me** est un eAe-module de Cohen-Macaulay.

Avant de prouver la proposition 4.4.39 nous avons besoin d'énoncer quelques résultats.

Theorème 4.4.40 ([63])**.** Soient A une K-algèbre n-Gorenstein et M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes

1. $\mathrm{dp}(\mathrm{M}) < \infty$.
2. $\mathrm{dp}(\mathrm{M}) \leq \mathrm{n}$.
3. $\mathrm{di}(\mathrm{M}) < \infty$.
4. $\mathrm{di}(\mathrm{M}) \leq \mathrm{n}$.

Lemme 4.4.41. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A tels que $\mathrm{dp}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)_{\mathrm{A}} < \infty$ et $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ soit une K-algèbre de Gorenstein. Soit M un $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$-module.
Si $\mathrm{dp}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty$ (respectivement $\mathrm{di}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty$) alors $\mathrm{dp}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}} < \infty$.

Preuve. 1. Nous traitons d'abord le cas où $\mathrm{dp}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty$. En vertu de la proposition 1.1.12 nous avons

$$\mathrm{dp}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}} \leq \mathrm{dp}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} + \mathrm{dp}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)_{\mathrm{A}} < \infty.$$

Or nous avons par hypothèse $\mathrm{dp}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)_{\mathrm{A}} < \infty$. Par conséquent, $\mathrm{dp}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}} < \infty$.

2. Supposons maintenant que $\mathrm{di}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty$. A/<e> étant une K-algèbre de Gorenstein il suit du théorème 4.4.40 que $\mathrm{di}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty$ est équivalent à $\mathrm{dp}(\mathrm{M})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty$. Ainsi nous revenons au premier cas. Ce qui achève la preuve.

□

Maintenant, on est en mesure de montrer la proposition 4.4.39.

Preuve. [**Proposition 4.4.39**] Puisque A est une K-algèbre de dimension finie, AeA est un idéal stratifiant, $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$ et $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$ alors d'après le théorème 4.4.32 on a l'existence du recollement de catégories dérivées bornées

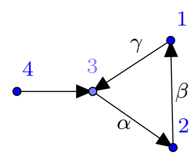
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{f}_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)$.
Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie il suit du théorème 4.4.29 qu'on a les K-algèbres A/ < e > et eAe sont aussi de Gorenstein. D'après le théorème 4.1.7 si $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{I}) = 0$ pour tout A/<e>-module injectif I et $\mathrm{i} \geq 0$
alors $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{eA}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Me},\mathrm{eAe})$.

Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{I}) = 0$ par hypothèse, il reste à montrer que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{I}) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. Or I est un A/<e>-module injectif ce qui équivaut à dire que
$\mathrm{di}(\mathrm{I})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} = 0 < \infty$. L'algèbre A/<e> étant de Gorenstein et $\mathrm{di}(\mathrm{I})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty$ alors il suit du lemme 4.4.41 que $\mathrm{dp}(\mathrm{I}_{\mathrm{A}}) < \infty$. Par hypothèse M est un A-module de Cohen-Macaulay, autrement dit, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{A}) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$.
Alors , d'après le lemme 4.4.37 on a $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{I}) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$.

Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}^i_A(M, I) = 0$ pour tout $A/<e>$-module injectif I et $i \geq 0$ alors $\mathrm{Ext}^i_A(M, eA) \simeq \mathrm{Ext}^i_{eAe}(Me, eAe)$. Enfin, puisque eA est un facteur direct de A et $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ pour tout $i \geq 1$ alors on a $\mathrm{Ext}^i_A(M, eA) = 0$ pour tout $i \geq 1$.
Par conséquent, $\mathrm{Ext}^i_{eAe}(Me, eAe) = 0$ pour tout $i \geq 1$ ce qui montre que Me est un eAe-module de Cohen-Macaulay. $\square$

Exemple 4.4.42. Soit A la K-algèbre de chemins munie des relations ci-contre



$\alpha\beta = 0 = \beta\gamma = \gamma\alpha.$
Posons $e = e_4$. Puisque AeA est un idéal source alors il suit de la proposition 4.3.16 que AeA est un idéal stratifiant. A est inclinée-amassée alors il suit du lemme 4.4.7 que A est 1-Gorenstein. Les K-algèbres eAe et $A/<e>$ de carquois sont représentées ci-dessous :

$$Q_C = Q_{eAe} = \quad .4$$

et

$$Q_B = Q_{A/<e>} = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 3 \arrow[ur, "\alpha"] & & 1 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

Puisque C est semisimple on a $\mathrm{dp}(Ae)_{eAe} < \infty$ et $\mathrm{dp}_{eAe}(eA) < \infty$. Le module

$$M = \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \end{array}$$

est un A-module projectif, donc de Cohen-Macaulay. On constate alors immédiatement que $\mathrm{Hom}_A(M, I) = 0$, pour tout B-module injectif I (car le module S_4 n'apparaît pas dans les suites de décomposition). Ainsi Me = 4 est un eAe-module de Cohen-Mcaulay.

Proposition 4.4.43. Soient A une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal stratifiant, $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$ et $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$. Si **M** est un eAe-module de Cohen-Macaulay tel que $\mathbf{Hom_A(Hom_{eAe}(Ae, M), I) = 0}$ pour tout A/<e>-module injectif I alors $\mathbf{Hom_{eAe}(Ae, M)}$ est un A-module de Cohen-Macaulay.

Preuve. Puisque A est une K-algèbre de dimension finie, AeA est un idéal stratifiant, $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$ et $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$ alors il suit du théorème 4.4.32 qu'il existe un recollement de catégories dérivées bornées :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{f}_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, -)$.
Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, alors il suit du théorème 4.4.29 que les K-algèbres A/<e> et eAe sont aussi de Gorenstein. D'après le théorème 4.1.7 si $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M}), \mathrm{I}) = 0$ pour tout A/<e>-module injectif I et $\mathrm{i} \geq 0$ alors $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M}), \mathrm{A}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M})\mathrm{e}, \mathrm{Ae})$.

Par hypothèse nous avons $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M}), \mathrm{I}) = 0$ donc il reste à montrer que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M}), \mathrm{I}) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$.
Nous avons $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M}), \mathrm{I}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M}), \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{I}))$.
pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. Puisque I est un A/<e>-module injectif alors la proposition 4.4.31 nous permet d'établir l'isomorphisme suivant

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M}), \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{I})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M}), \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >), \mathrm{I})$$

pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. Il suit du corollaire 4.1.6 qu'on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{M})) \simeq \mathrm{M}$ pour tout eAe-module M. Puisque AeA est un idéal stratifiant alors il suit aussi de la proposition 4.4.30 qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_i^A(\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, M), A/ < e >) \simeq \mathrm{Tor}_{i+1}^{eAe}(M, eA) \text{ pour tout } i \ \geq 1.$$

D'où $\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, M), \mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/ < e >, I)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/<e>}(\mathrm{Tor}_{i+1}^{eAe}(M, eA), I)$ pour tout $i \ \geq 1$. Or M est un eAe-module de Cohen-Macaulay, donc un eAe-module Gorenstein-projectif. En outre, $\mathrm{dp}({}_{eAe}eA) < \infty$, alors en vertu du lemme 4.4.36 on a $\mathrm{Tor}_i^{eAe}(M, eA) = 0$ pour tout $i \ \geq 1$. Ainsi $\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, M), I) = 0$ pour tout $i \ \geq 1$. Puisque $\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, M), I) = 0$ pour tout A/<e>-module injectif I et $i \geq 0$ alors $\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, M), A) \simeq \mathrm{Ext}_{eAe}^i(\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, M)e, Ae)$.
Comme M est un eAe-module de Cohen-Macaulay, on a $\mathrm{Ext}_{eAe}^i(M, eAe) = 0$ pour tout $i \geq 1$. De plus $\mathrm{dp}(Ae_{eAe}) < \infty$, alors le lemme 4.4.37 induit ceci $\mathrm{Ext}_{eAe}^i(M, Ae) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi $\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, M), A) = 0$ pour tout $i \geq 1$ ce qui équivaut à dire que $\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, M)$ est un A-module de Cohen-Macaulay. □

Exemple 4.4.44. Soit $A = KQ/I$ la K-algèbre de carquois Q lié où

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

et $I =< \alpha\beta; \beta\gamma >$. Posons $e = e_1 + e_2$. Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que AeA est un idéal stratifiant. A est une K-algèbre de dimension globale 2 donc A est 2-Gorenstein. La K-algèbre de chemins eAe est donnée par le carquois

$$Q_C = Q_{eAe} = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Puisque $C = eAe$ est héréditaire alors $\mathrm{dp}(Ae_{eAe}) < \infty$, $\mathrm{dp}({}_{eAe}eA) < \infty$. Le module

$$\mathbf{L} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

est un eAe-module projectif donc de Cohen-Macaulay. On a $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, L), I) = 0$ pour tout module B-injectif I. En effet, $Ae \simeq eAe$ car AeA est un idéal source. Par conséquent, on peut vérifier aisément que

$$\mathrm{Hom_A(Hom_{eAe}(Ae,L),I_3^B) = Hom_A(}\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}, \quad 3\ ) = 0$$

$$\mathrm{Hom_A(Hom_{eAe}(Ae,L),I_4^B) = Hom_A(}\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\ ) = 0.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Hom_{eAe}(Ae,L)}$ est un A-module de Cohen-Macaulay.

Remarque 4.4.45. Nous aimerions attirer l'attention du lecteur sur les faits suivants. En fait, Buchweitz a classifié les modules de Cohen-Macaulay dans le cas d'une K-algèbre de Gorenstein, ils sont projectifs ou de dimension projective infinie (voir 4.4.34). De plus, il suit du corollaire 4.1.6 que le foncteur $\mathrm{Hom_{eAe}(Ae,-)}$ préserve les injectifs et non tous les projectifs. Toutefois, il ne préserve pas nécessairement les projectifs. Donc il faut tenir compte de ces faits lorsqu'on choisit des exemples.

Exemple 4.4.46. Soit $\mathrm{A = KQ/I}$ la K-algèbre de chemins Q lié où

$$\mathrm{Q} = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

et $\mathrm{I} =< \alpha\beta; \beta\gamma >$. Posons $\mathrm{e = e_1 + e_2}$. Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que AeA est un idéal stratifiant. A est une K-algèbre de dimension globale 2 donc A est 2-Gorenstein. La K-algèbre de chemins eAe est donnée par le carquois

$$\mathrm{Q_C = Q_{eAe}} = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Puisque $\mathrm{C = eAe}$ est héréditaire alors $\mathrm{dp(Ae_{eAe})} < \infty$, $\mathrm{dp(_{eAe}eA)} < \infty$. Le module

$$\mathbf{L} = \ 2$$

est un eAe-module projectif donc de Cohen-Macaulay. On a $\mathrm{Hom_A(Hom_{eAe}(Ae,L),I) = 0}$ pour tout module B-injectif I. En effet, $\mathrm{Ae \simeq eAe}$ car AeA est un idéal source. Par conséquent, on peut vérifier aisément que

$$\mathrm{Hom_A}(\mathrm{Hom_{eAe}}(\mathrm{Ae},\mathrm{L}),\mathrm{I_3^B}) = \mathrm{Hom_A}(\ 2\ ,\quad 3\ ) = 0$$

$$\mathrm{Hom_A}(\mathrm{Hom_{eAe}}(\mathrm{Ae},\mathrm{L}),\mathrm{I_4^B}) = \mathrm{Hom_A}(\ 2\ ,\quad \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\ ) = 0.$$

Et pourtant $\mathrm{Hom_{eAe}}(\mathrm{Ae},\mathrm{L}) \simeq \mathrm{L}$ n'est pas un A-module de Cohen-Macaulay. En effet, il n'est pas un A-module projectif. Bien que les hypothèses du théorème soient satisfaites, l'image du eAe-module de Cohen-Macaulay **L** par le foncteur $\mathbf{Hom_{eAe}(Ae,-)}$ n'est pas un A-module de Cohen-Macaulay. Cet exemple corrobore les faits relatés dans la remarque ci-dessus. Par conséquent, il faut tenir compte de ces paramètres dans les exemples.

Lemme 4.4.47. Soient A une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et e un idempotent de A tels que $\mathrm{dp_{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$. Si AeA est un idéal source alors on a le recollement suivant de catégories dérivées bornées

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>) \arrow[r, "\mathrm{g}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom_A}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom_A}(\mathrm{e}'\mathrm{A},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{e}'\mathrm{A}\mathrm{e}') \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{e}'\mathrm{A}\mathrm{e}'}\mathrm{e}'\mathrm{A}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{e}'\mathrm{A}\mathrm{e}'}(\mathrm{A}\mathrm{e}',-)"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{e}' = 1 - \mathrm{e}$ et $\mathrm{g}_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>,-)$

Preuve. Il suit du théorème 4.4.32 que

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom_A}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom_A}(\mathrm{eA},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{eAe}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom_{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

est un recollement si et seulement si AeA est stratifiant et $\mathrm{dp_{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$, $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$ Puisque AeA est un idéal source alors il suit de la proposition 4.3.16 que AeA est un idéal stratifiant. Or $\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe} \oplus \mathrm{e}'\mathrm{Ae}$ ainsi $\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe}$. Nous en déduisons que $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$. De plus $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$. Puisque A est une K-algèbre de dimension finie, AeA un idéal stratifiant et $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$, $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$ donc le résultat s'ensuit d'après le théorème 4.4.32. Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, alors il suit du théorème 4.4.29 que les K-algèbres $\mathrm{A}/\!<\!\mathrm{e}\!>$ et eAe sont aussi de Gorenstein.

Il suit du théorème 4.4.32 que

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>) \arrow[r, "\mathrm{g}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{e}'\mathrm{A},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{e}'\mathrm{Ae}') \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'}\mathrm{e}'\mathrm{A}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'}(\mathrm{Ae}',-)"]
\end{tikzcd}$$

est un recollement si et seulement si $\mathrm{Ae}'\mathrm{A}$ est stratifiant et $\mathrm{dp}_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'}(\mathrm{e}'\mathrm{A}) < \infty$, $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae}')_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'} < \infty$. Puisque AeA est un idéal source alors $\mathrm{Ae}'\mathrm{A}$ est un idéal puits. Il suit de la proposition 4.3.16 que $\mathrm{Ae}'\mathrm{A}$ est stratifiant. Or $\mathrm{e}'\mathrm{A} \simeq \mathrm{e}'\mathrm{Ae}' \oplus \mathrm{e}'\mathrm{Ae}$ ainsi $\mathrm{e}'\mathrm{A} \simeq \mathrm{e}'\mathrm{Ae}'$. Nous en déduisons que $\mathrm{dp}_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'}(\mathrm{e}'\mathrm{A}) < \infty$. Il reste à prouver que $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae}')_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'} < \infty$. Nous avons la décomposition suivante $\mathrm{Ae}' \simeq \mathrm{e}'\mathrm{Ae}' \oplus \mathrm{eAe}'$ en tant que $\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'$-modules. D'où $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae}')_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'} = \mathrm{Sup}\,\{\mathrm{dp}(\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'), \mathrm{dp}(\mathrm{eAe}')\}$. Puisque AeA est un idéal source alors on a

$$\mathrm{A} \simeq \begin{bmatrix} \mathrm{eAe} & \mathrm{eAe}' \\ 0 & \mathrm{e}'\mathrm{Ae}' \end{bmatrix}$$

A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, il suit du lemme 4.4.49 que nous avons $\mathrm{di}(\mathrm{eAe}')_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'} < \infty$. De même, il suit de la proposition 4.3.16 que nous avons l'isomorphisme de K-algèbres suivant

$$\mathrm{A}/<\mathrm{e}>\simeq \mathrm{e}'\mathrm{Ae}'.$$

Par conséquent, $\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'$ est une K-algèbre de Gorenstein. Nous avons

$$\mathrm{di}(\mathrm{eAe}')_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'} = \mathrm{di}(\mathrm{eAe}')_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty$$

$\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'$ étant une K-algèbre de Gorenstein et $\mathrm{di}(\mathrm{eAe}')_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'} < \infty$ alors il suit du théorème 4.4.40 que nous avons $\mathrm{dp}(\mathrm{eAe}')_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'} < \infty$.

Nous en déduisons que $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae}')_{\mathrm{e'Ae'}} < \infty$. $\mathrm{Ae'A}$ stratifiant et $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae}')_{\mathrm{e'Ae'}} < \infty, \mathrm{dp}_{\mathrm{e'Ae'}}(\mathrm{e'A}) < \infty$ alors il suit du théorème 4.4.32 qu'on a le recollement cherché. $\square$

Proposition 4.4.48. Soient A une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal source et $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$.
Si **M** est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay alors **M** est un A-module de Cohen-Macaulay.

Pour démontrer cette proposition nous avons besoin de ce lemme.

Lemme 4.4.49 ([27]). Soit $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{M} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ une K-algèbre artinienne.

1. Si Λ est de Gorenstein alors $\mathrm{di}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}) < \infty, \mathrm{di}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}) < \infty$, $\mathrm{di}(\mathrm{B}_{\mathrm{B}}) < \infty$ et $\mathrm{di}(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}) < \infty$.
2. Si $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}) < \infty$ alors Λ est de Gorenstein si et seulement si A et B sont de Gorenstein et $\mathrm{dp}(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}) < \infty$.
3. Si $\mathrm{dp}(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}) < \infty$ alors Λ est de Gorenstein si et seulement si A et B sont de Gorenstein et $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}) < \infty$.
4. Si $\mathrm{di}(\mathrm{A}_{\mathrm{A}}) < \infty$ alors Λ est de Gorenstein si et seulement si A et B sont de Gorenstein, $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}) < \infty$ et $\mathrm{dp}(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}) < \infty$.

Maintenant, on est en mesure de montrer la proposition 4.4.48. Mais tout d'abord, rappelons que $\mathrm{e}' = 1 - \mathrm{e}$.

Preuve. [**Proposition 4.4.48**] Puisque A est une K-algèbre de dimension finie, AeA est un idéal stratifiant, $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$ et $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$, il suit du théorème 4.4.32 qu'il existe un recollement de catégories dérivées bornées :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>{,}-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}{,}-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}{,}-)"]
\end{tikzcd}$$

où $f_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/<e>, -)$.
Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, il suit du théorème 4.4.29 que les K-algèbres A/<e> et eAe sont aussi de Gorenstein. Nous allons montrer que si M est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay alors M est aussi un A-module de Cohen-Macaulay. Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que AeA est un idéal stratifiant. Il suit aussi de la définition 4.2.1 que AeA stratifiant alors on a

$$\mathrm{Ext}^i_{A/<e>}(M, A/<e>) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, A/<e>) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

On a $\mathrm{Ext}^i_A(M, A/<e>) = 0$ pour tout $i \geq 1$, car M est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. AeA étant un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 qu'on a l'isomorphisme de A-modules

$A/<e> \simeq e'A$. On veut montrer que $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ pour tout $i \geq 1$. On sait que

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, A) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, eA) \oplus \mathrm{Ext}^i_A(M, e'A) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Ainsi, nous obtenons,

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, A) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, eA) \oplus \mathrm{Ext}^i_A(M, A/<e>) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

D'où

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, A) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, eA) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Montrons que $\mathrm{Ext}^i_A(M, eA) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

D'après le corollaire 4.1.8 si $\mathrm{Ext}^i_A(M, I) = 0$ pour tout $A/<e'>$-module injectif I et $i \geq 0$ alors on a $\mathrm{Ext}^i_A(M, eA) \simeq \mathrm{Ext}^i_{e'Ae'}(Me', eAe')$.

Montrons que $\mathrm{Ext}^i_A(M, I) = 0$ pour tout $i \geq 0$. On a

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, I) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, \mathrm{Hom}_{A/<e'>}(A/<e'>, I)) \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Puisque I est un $A/<e'>$-module injectif, il suit de la proposition 4.4.31 qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, \mathrm{Hom}_{A/<e'>}(A/<e'>, I)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/<e'>}(\mathrm{Tor}^A_i(M, A/<e'>), I)$$

pour tout $i \geq 0$. Puisque AeA est un idéal stratifiant, la proposition 4.4.30 nous permet d'obtenir l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}^A_i(M, A/<e'>) \simeq \mathrm{Tor}^{e'Ae'}_{i+1}(Me', e'A) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Puisque AeA est un idéal source, alors on a $e'A \simeq e'Ae'$. Ainsi

$$\mathrm{Tor}^A_i(M, A/<e'>) \simeq \mathrm{Tor}^{e'Ae'}_{i+1}(Me', e'A) = 0 \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}^i_A(M, I) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et I un $A/<e'>$-module injectif. Pour le cas $i = 0$, on a $\mathrm{Tor}^A_0(M, A/<e'>) \simeq M \otimes_A A/<e'>$. Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 qu'on a l'isomorphisme de A^{op}-modules $A/<e'> \simeq Ae$.

Nous en déduisons que

$$\mathrm{Tor}^A_0(M, A/<e'>) \simeq M \otimes_A A/<e'> \simeq Me = 0.$$

En effet, M est un $A/<e>$-module. Par suite $\mathrm{Ext}^i_A(M, I) = 0$ pour tout $i \geq 0$ et I un $A/<e'>$-module injectif. Puisque $\mathrm{Ext}^i_A(M, I) = 0$ pour tout $A/<e'>$-module injectif I et $i \geq 0$ alors on a $\mathrm{Ext}^i_A(M, eA) \simeq \mathrm{Ext}^i_{e'Ae'}(Me', eAe')$. En particulier,

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, eA) \simeq \mathrm{Ext}^i_{e'Ae'}(Me', eAe') \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Puisque AeA est un idéal source alors on a

$$A \simeq \begin{bmatrix} eAe & eAe' \\ 0 & e'Ae' \end{bmatrix}.$$

A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, il suit du lemme 4.4.49 que nous avons $\mathrm{di}(\mathrm{eAe'}_{\mathrm{e'Ae'}}) < \infty$. De même, il suit de la proposition 4.3.16 que nous avons l'isomorphisme de K-algèbres suivant $\mathrm{A}/<\mathrm{e}> \simeq \mathrm{e'Ae'}$.

Par conséquent, $\mathrm{e'Ae'}$ est une K-algèbre de Gorenstein. Nous avons

$$\mathrm{di}(\mathrm{eAe'})_{\mathrm{e'Ae'}} = \mathrm{di}(\mathrm{eAe'})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty.$$

$\mathrm{e'Ae'}$ étant une K-algèbre de Gorenstein et $\mathrm{di}(\mathrm{eAe'})_{\mathrm{e'Ae'}} < \infty$, il suit du théorème 4.4.40 que nous avons $\mathrm{dp}(\mathrm{eAe'})_{\mathrm{e'Ae'}} < \infty$. Par hypothèse, on a

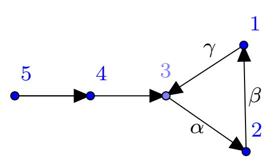
$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1 \text{ et } \mathrm{dp}(\mathrm{eAe'})_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} < \infty,$$

il suit du lemme 4.4.37 qu'on a

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{M}, \mathrm{eAe'}) = 0 = \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{e'Ae'}}(\mathrm{M}, \mathrm{eAe'}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{e'Ae'}}(\mathrm{Me'}, \mathrm{eAe'}) \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1.$$

En effet, il suit du théorème 4.3.17 qu'on a $\mathrm{M} \simeq \mathrm{Me'}$ car M est un A/<e>-module. Par conséquent, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{eA}) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. Ce qui équivaut à dire que M est un A-module de Cohen-Macaulay. □

Exemple 4.4.50. Soit A la K-algèbre de chemins munie des relations ci-dessous



$\alpha\beta = 0 = \beta\gamma = \gamma\alpha.$

Posons $\mathrm{e} = \mathrm{e}_4 + \mathrm{e}_5$, on en déduit que AeA est un idéal source. A est inclinée-amassée, il suit du lemme 4.4.7 que A est 1-Gorenstein. Les K-algèbres eAe et A/<e> de carquois liés sont représentées ci-dessous

$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 3 \arrow[ur, "\alpha"] & & 1 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Q_C = Q_{eAe} = 5 \to 4}$$

B étant une K-algèbre auto-injective alors

$$\mathbf{N} = \; 3 \;\oplus\; \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. Par conséquent, **N** est un A-module de Cohen-Macaulay.

Proposition 4.4.51. Soient A une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal stratifiant et $\mathrm{dp_{eAe}(eA)} < \infty$, $\mathrm{dp(Ae)_{eAe}} < \infty$. Si **M** est un A-module de Cohen-Macaulay alors $\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/<\mathbf{e}>$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay.

Preuve. Puisque A est une K-algèbre de dimension finie, AeA est un idéal stratifiant, $\mathrm{dp(Ae)_{eAe}} < \infty$ et $\mathrm{dp_{eAe}(eA)} < \infty$, il suit du théorème 4.4.32 qu'il existe un recollement de catégories dérivées bornées

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{f_* = \mathbb{R}Hom_{A/<e>}(A/<e>, -)}$.
Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, il suit du théorème 4.4.29 que les K-algèbres A/<e> et eAe sont aussi de Gorenstein. Puisque AeA est un idéal stratifiant, il suit de la définition 4.2.1 que nous avons

$$\mathrm{Ext^i_{A/<e>}(M \otimes_A A/<e>, A/<e>) \simeq Ext^i_A(M \otimes_A A/<e>, A/<e>)} \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1.$$

Considérons la suite exacte courte de $\mathrm{A^{op}}$-modules

$$0 \to <\mathrm{e}> \to \mathrm{A} \to \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \to 0.$$

Appliquons le foncteur $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} -$ à cette suite. Alors nous obtenons la suite exacte suivante

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{AeA} \to \mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to 0.$$

AeA étant un idéal stratifiant, alors nous avons l'isomorphisme de A-A-bimodules

$$\mathrm{Ae} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \simeq \mathrm{AeA}$$

qui implique

$$\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{AeA} \simeq \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{Ae} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \simeq \mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}.$$

Ainsi notre suite exacte devient

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \to \mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \to \mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to 0.$$

L'existence du recollement sur les catégories dérivées bornées ci-dessus entraîne que $\mathrm{dp}(\mathrm{AeA}_{\mathrm{A}}) < \infty$ et $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{AeA}) < \infty$ (voir théorème 4.4.32), il suit de la proposition 1.1.9 qu'on a $\mathrm{dp}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >_{\mathrm{A}}) < \infty$ et $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) < \infty$. Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein et M un A-module de Cohen-Macaulay, il suit de la proposition 4.4.35 que M est aussi Gorenstein-projectif. Puisque $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) < \infty,$ il suit du lemme 4.4.36 que nous avons $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. En particulier, $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) = 0$. Ainsi notre suite ci-dessus se transforme en une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \to \mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to 0.$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(-, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >)$ à cette suite exacte courte nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}, \mathrm{B}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{B}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{B}) \arrow[dll, "\alpha^0"] \\
& \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}, \mathrm{B}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}, \mathrm{B}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{B}) \arrow[dll, "\alpha^1"] \\
& \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^2(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}, \mathrm{B}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^2(\mathrm{M}, \mathrm{B}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^2(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{B}) \arrow[dll, dashed] \\
& \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}, \mathrm{B}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M}, \mathrm{B}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{B}) \to \cdots
\end{tikzcd}$$

où $B = A/ < e >$. On a $\mathrm{Ext}^1_A(M \otimes_A A/ < e >, A/ < e >) = 0$. En effet, Il suit du théorème d'adjonction 1.1.10 qu'on a

$$\mathrm{Hom}_A(Me \otimes_{eAe} eA, B) \simeq \mathrm{Hom}_{eAe}(Me, \mathrm{Hom}_A(eA, B)) \simeq \mathrm{Hom}_{eAe}(Me, (B)e) = 0.$$

Puisque $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ pour tout $i \geq 1$ par hypothèse et $\mathrm{dp}(A/ < e >_A) < \infty$, il suit du lemme 4.4.37 qu'on a $\mathrm{Ext}^i_A(M, A/ < e >) = 0$ pour tout $i \geq 1$. En particulier, on a $\mathrm{Ext}^1_A(M, A/ < e >) = 0$. Ainsi, nous en déduisons que

$$\mathrm{Ext}^i_A(Me \otimes_{eAe} eA, A/ < e >) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_A(M \otimes_A A/ < e >, A/ < e >) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

D'après le corollaire 4.1.8 si $\mathrm{Ext}^i_A(Me \otimes_{eAe} eA, I) = 0$ pour tout $A/<e>$-module injectif I et $i \geq 0$ alors on a $\mathrm{Ext}^i_A(M \otimes_{eAe} eA, A/ < e >) \simeq \mathrm{Ext}^i_{eAe}(Me, (A/ < e >)e)$. Montrons que

$$\mathrm{Ext}^i_A(Me \otimes_{eAe} eA, I) = 0 \text{ pour tout } I \in \mathrm{Inj}(A/ < e >) \text{ et } i \geq 0.$$

Pour $i = 0$, l'adjonction 1.1.10 nous permet d'obtenir

$$\mathrm{Hom}_A(Me \otimes_{eAe} eA, I) \simeq \mathrm{Hom}_{eAe}(Me, \mathrm{Hom}_A(eA, I)) \simeq \mathrm{Hom}_{eAe}(Me, Ie) = 0.$$

En effet, I est un $A/<e>$-module, il s'ensuit que $Ie = 0$. Il reste à montrer que $\mathrm{Ext}^i_A(Me \otimes_{eAe} eA, I) = 0$ pour tout $i \geq 1$. On a

$$\mathrm{Ext}^i_A(Me \otimes_{eAe} eA, I) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(Me \otimes_{eAe} eA, \mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/ < e >, I)) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Puisque I est un $A/<e>$-module injectif, il suit de la proposition 4.4.31 qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_A(Me \otimes_{eAe} eA, \mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/ < e >, I)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/<e>}(\mathrm{Tor}^A_i(Me \otimes_{eAe} eA, A/ < e >), I)$$

pour tout $i \geq 0$. Puisque AeA est un idéal stratifiant, la proposition 4.4.30 nous permet d'obtenir l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}^A_i(Me \otimes_{eAe} eA, A/ < e >) \simeq \mathrm{Tor}^{eAe}_{i+1}((Me \otimes_{eAe} eA)e, eA) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

D'après le corollaire 4.1.6 on a $(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA})\mathrm{e} \simeq \mathrm{Me}$. Il s'ensuit que,

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}_{\mathrm{i+1}}^{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Me}, \mathrm{eA}) \text{ pour tout i } \geq 1.$$

De même la proposition 4.4.30 nous permet d'obtenir l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}_{\mathrm{i+1}}^{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Me}, \mathrm{eA}) \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Nous en déduisons que

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Or $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0$ pour tout i ≥ 1, il s'ensuit que

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}>, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Ainsi nous avons

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{I}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i+1}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{eA}), \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Étant donné que, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{I}) = 0$ pour tout A/<e>-module injectif I et $\mathrm{i} \geq 0$ alors on a $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{eAe}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me}, (\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)\mathrm{e})$. D'où

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i+1}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0$ pour tout i ≥ 1. Comme que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{1}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0$ cela entraîne que

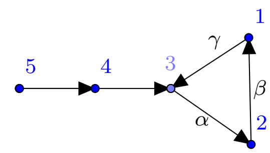
$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Ce qui induit que

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i} \geq 1.$$

Par conséquent, $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. $\square$

Exemple 4.4.52. Soit A la K-algèbre de chemins munie des relations ci-dessous



$$\alpha\beta = 0 = \beta\gamma = \gamma\alpha.$$

Posons $\mathrm{e} = \mathrm{e}_4 + \mathrm{e}_5$, AeA est stratifiant car source. A est inclinée-amassée donc 1-Gorenstein (voir 4.4.7). Les K-algèbres eAe et A/<e> de carquois sont représentées ci-dessous

$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q_{A/<e>}} = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 3 \arrow[ur, "\alpha"] & & 1 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Q_C} = \mathrm{Q_{eAe}} = 5 \rightarrow 4$$

Puisque C est héréditaire alors $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}) < \infty$ et $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae}_{\mathrm{eAe}}) < \infty$. Posons

$$\mathbf{M} = \ 3 \ \oplus \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus 2$$

Vérifions que M est un A-module de Cohen-Macaulay. Écrivons-le comme suit $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$ avec

$$\mathrm{M}_1 = \ 3 \ \oplus \ 2 \ ; \quad \mathrm{M}_2 = \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

M_2 est un A-module projectif donc de Cohen-Macaulay. A/<e> étant une K-algèbre auto-injective, il s'ensuit que M_1 est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. Puisque A est une K-algèbre 1-Gorenstein de dimension finie et AeA un idéal source, il suit de la proposition 4.4.48 que M_1 est aussi un A-module de Cohen-Macaulay. D'où M est un A-module de Cohen-Macaulay. Il reste à vérifier que $\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/<\mathbf{e}>$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. On a la décomposition suivante

$$\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/<\mathbf{e}> \simeq (\mathbf{M_1} \oplus \mathbf{M_2}) \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/<\mathbf{e}> \simeq \mathbf{M_1} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/<\mathbf{e}> \oplus \mathbf{M_2} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/<\mathbf{e}>.$$

$$\mathbf{M \otimes_A A/ < e > \simeq (M_1 \oplus M_2) \otimes_A A/ < e > \simeq M_1/M_1 < e > \oplus e_3A/e_3Ae_3}$$

$$\mathbf{M_1/M_1 < e > \oplus e_3A/e_3Ae_3} \simeq \mathrm{M_1 \oplus 0 \simeq S_3 \oplus S_2}.$$

Proposition 4.4.53. Soient A une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal source et $\mathrm{dp_{eAe}(eA)} < \infty$. Si $\mathbf{M}$ est un A-module de Cohen-Macaulay alors $\mathbf{Hom_A(A/ < e >, M)}$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay.

Preuve. Puisque A est une K-algèbre de dimension finie, AeA est un idéal stratifiant, $\mathrm{dp(Ae)_{eAe}} < \infty$ et $\mathrm{dp_{eAe}(eA)} < \infty$, il suit du théorème 4.4.32 qu'il existe un recollement de catégories dérivées bornées

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{f_* = \mathbb{R}Hom_{A/<e>}(A/ < e >, -)}$.
Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, il suit du théorème 4.4.29 que les K-algèbres A/<e> et eAe sont aussi de Gorenstein. AeA étant un idéal source, il suit du théorème 4.3.17 que nous avons l'isomorphisme de A-modules

$$\mathrm{Hom_A(A/ < e >, M) \simeq Me'}.$$

Nous voulons montrer que $\mathrm{Ext^i_{A/<e>}(Hom_A(A/ < e >, M), A/ < e >) = 0}$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$
Puisque AeA est un idéal source donc stratifiant, il suit de la définition 4.2.1 qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext^i_{A/<e>}(Me', A/ < e >) \simeq Ext^i_A(Me', A/ < e >)} \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1$$

Puisque AeA est un idéal source, il suit du théorème 4.3.17 qu'on a la suite exacte courte de A-modules

$$0 \to \mathrm{Me'} \to \mathrm{M} \to \mathrm{Me} \to 0.$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, A/<e>)$ à cette suite nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_A(Me, A/<e>) \to \mathrm{Ext}^i_A(M, A/<e>) \to \mathrm{Ext}^i_A(Me', A/<e>) \to \cdots$$

$$\to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(Me, A/<e>) \to \cdots$$

L'existence du recollement sur les catégories dérivées bornées ci-dessus entraîne que $\mathrm{dp}(AeA_A) < \infty$ et $\mathrm{dp}({}_AAeA) < \infty$ (voir théorème 4.4.32), il suit de la proposition 1.1.9 qu'on a $\mathrm{dp}(A/<e>_A) < \infty$ et $\mathrm{dp}({}_AA/<e>) < \infty$. Or par hypothèse, nous avons $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et $\mathrm{dp}(A/<e>_A) < \infty$, il suit du lemme 4.4.37 que nous avons $\mathrm{Ext}^i_A(M, A/<e>) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi nous obtenons

$$\mathrm{Ext}^i_A(Me', A/<e>) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_A(Me, A/<e>) \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Montrons que $\mathrm{Ext}^i_A(Me, A/<e>) = 0$ pour tout $i \geq 1$ D'après le corollaire 4.1.8 si $\mathrm{Ext}^i_A(Me, I) = 0$ pour tout $A/<e>$-module injectif I et $i \geq 0$ alors on a
$\mathrm{Ext}^i_A(Me, A/<e>) \simeq \mathrm{Ext}^i_{eAe}(Me, (A/<e>)e)$. Montrons que

$$\mathrm{Ext}^i_A(Me, I) = 0 \text{ pour tout } I \in \mathrm{Inj}(A/<e>) \text{ et } i \geq 0.$$

Nous avons

$$\mathrm{Ext}^i_A(Me, I) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(Me, \mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/<e>, I)) \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Puisque I est un $A/<e>$-module injectif, il suit de la proposition 4.4.31 qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_A(Me, \mathrm{Hom}_{A/<e>}(A/<e>, I)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/<e>}(\mathrm{Tor}^A_i(Me, A/<e>), I)$$

pour tout $i \geq 0$. Pour $i = 0$ nous avons

$$\mathrm{Tor}^A_0(Me, A/<e>) \simeq Me \otimes_A A/<e> \simeq Me/MeAeA = 0.$$

Puisque AeA est un idéal stratifiant, la proposition 4.4.30 nous permet d'obtenir l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Me}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}_{\mathrm{i+1}}^{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Me}, \mathrm{eA}) \text{ pour tout i } \geq 1.$$

De même la proposition 4.4.30 nous permet d'obtenir l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}_{\mathrm{i+1}}^{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Me}, \mathrm{eA}) \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Nous en déduisons que

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Me}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein et M un A-module de Cohen-Macaulay, il suit de la proposition 4.4.35 que M est aussi Gorenstein-projectif. M Gorenstein-projectif et $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) < \infty$, il suit du lemme 4.4.36 que nous avons $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Me}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Ainsi nous avons

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me}, \mathrm{I}) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Étant donné que,

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me}, \mathrm{I}) = 0 \text{ pour tout A/<e>-module injectif I et i} \geq 0$$

alors on a $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{eAe}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me}, (\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)\mathrm{e}) = 0$. D'où

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i+1}}(\mathrm{Me}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. Nous en déduisons que

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Me}', \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

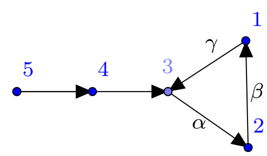
Par conséquent,

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{M}),\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{Me}',\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)$$

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{Me}',\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Me}',\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) = 0 \text{ pour tout i } \geq 1.$$

Nous concluons que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{M})$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. $\square$

Exemple 4.4.54. Soit A la K-algèbre de chemins munie des relations ci-dessous



$$\alpha\beta = 0 = \beta\gamma = \gamma\alpha.$$

Posons $\mathrm{e} = \mathrm{e}_4 + \mathrm{e}_5$. La K-algèbre A/<e> de carquois est représentée ci-dessous

$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 3 \arrow[ur, "\alpha"] & & 1 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

D'après l'exemple 4.4.52 le module

$$\mathbf{M} = 3 \oplus \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus 1 \quad \text{est un A-module de Cohen-Macaulay.}$$

A est une K-algèbre de dimension finie et AeA est un idéal source. Puisque A est inclinée-amassée alors il suit du lemme 4.4.7 que A est 1-Gorenstein alors les hypothèses de la proposition4.4.53 sont satisfaites. Par conséquent

$$\mathbf{Hom_A(A/<e>,M) \simeq Me'} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus 3 \oplus 1$$

est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay.

Remarque 4.4.55. Nous aimerions attirer l'attention du lecteur sur les faits suivants. En fait, Buchweitz a classifié les modules de Cohen-Macaulay dans le cas d'une K-algèbre de Gorenstein, ils sont projectifs ou de dimension projective infinie (voir 4.4.34). De plus, il suit du corollaire 4.1.6 que le foncteur $\mathbf{Hom_A(A/<e>,-)}$ préserve les injectifs et non tous les projectifs. Toutefois, il ne préserve pas nécessairement les projectifs. Donc il faut tenir compte de ces faits lorsqu'on choisit des exemples.

Exemple 4.4.56. Soit A = KQ/I la K-algèbre de carquois Q lié où

$$\mathrm{Q} = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

et $\mathrm{I} =< \alpha\beta; \beta\gamma >$. Posons $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$. Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que AeA est un idéal stratifiant. A est une K-algèbre de dimension globale 2 donc A est 2-Gorenstein. La K-algèbre de chemins A/<e> est donnée par le carquois

$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q_{A/<e>}} = 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

Puisque C = eAe est héréditaire alors $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae_{eAe}}) < \infty$, $\mathrm{dp}(_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}) < \infty$. Le module

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

est un A-module projectif donc de Cohen-Macaulay. Et pourtant

$$\mathbf{Hom_A(A/<e>,M) \simeq S_3}$$

n'est pas un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. En effet, il n'est pas un A/<e>-module projectif. Bien que les hypothèses du théorème soient satisfaites, l'image du A-module de Cohen-Macaulay **M** par le foncteur $\mathbf{Hom_A(A/<e>,-)}$ n'est pas un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. Cet exemple corrobore les faits relatés dans la remarque ci-dessus. Par conséquent, il faut tenir compte de ces paramètres dans les exemples.

Étant donné que l'objectif de ce chapitre est d'établir la restriction du recollement défini par Cline, Parshall et Scott aux modules de Cohen-Macaulay. Les six propositions susmentionnées nous permettent d'obtenir le résultat escompté. Cependant, il est difficile de trouver un cadre réunissant ces six propositions pour obtenir le recollement sur les modules de Cohen-Macaulay. Le théorème de la section suivante en l'occurrence le résultat principal de nos recherches est le cadre idéal liant ces six propositions. Toutefois, il faut noter que les résultats énoncés ci-dessus sont plus généraux.

4.5 Résultat principal

Dans cette section nous allons énoncer le résultat principal de cette thèse autrement dit le théorème sur le recollement des modules de Cohen-Macaulay.

Theorème 4.5.1. Soient A une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et e un idempotent de A tels que $\mathrm{dp}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) < \infty$. Si AeA est un idéal source alors nous avons les recollements suivants sur les catégories de modules de Cohen-Macaulay.

1.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CM}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{CM}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{CM}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"] \end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CM}(\mathrm{A}/<\mathrm{e'}>) \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{CM}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e'}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e'}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{e'A},-)"] & \mathrm{CM}(\mathrm{e'Ae'}). \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{e'Ae'}}\mathrm{e'A}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{e'Ae'}}(\mathrm{Ae'},-)"] \end{tikzcd}$$

Preuve. 1. L'idéal AeA est source donc stratifiant, de même $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae})_{\mathrm{eAe}} < \infty$. En effet, on a la décomposition suivante en tant que eAe-modules : $\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe} \oplus \mathrm{e'Ae}$.

AeA source implique que Ae $\simeq$ eAe. Puisque A est une K-algèbre de dimension finie, AeA est un idéal stratifiant, $\mathrm{dp(Ae)_{eAe}} < \infty$ et $\mathrm{dp_{eAe}(eA)} < \infty$, il suit du théorème 4.4.32 qu'il existe un recollement de catégories dérivées bornées

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \arrow[r, "\mathrm{f}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{eAe}). \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{f}_* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)$.

Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, il suit du théorème 4.4.29 que les K-algèbres A/<e> et eAe sont aussi de Gorenstein.

(a) Étudions le foncteur $-\otimes_{\mathbf{eAe}}\mathbf{eA} : \mathbf{mod(eAe)} \to \mathbf{mod(A)}$. Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, AeA est un idéal stratifiant et $\mathrm{dp_{eAe}(eA)} < \infty$, $\mathrm{dp(Ae)_{eAe}} < \infty$, il suit de la proposition 4.4.26 que si M est un eAe-module de Cohen-Macaulay alors $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}$ est un A-module de Cohen-Macaulay.

(b) Étudions le foncteur $\mathbf{Hom_A(eA,-)} : \mathbf{mod(A)} \to \mathbf{mod(eAe)}$. Soit M un A-module de Cohen-Macaulay. Nous voulons montrer que Me est un eAe-module de Cohen-Macaulay. Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que nous avons respectivement les isomorphismes de $\mathrm{A^{op}}$-modules et de K-algèbres suivants

$$\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>\simeq \mathrm{Ae}, \quad \mathrm{A}/<\mathrm{e}'>\simeq \mathrm{eAe}.$$

$\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>$ étant un $\mathrm{A^{op}}$-module, il suit de la proposition 4.3.9 que nous avons

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>,\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>) \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 0.$$

Du coup, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{Ae},\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>)$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$.

On a

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>,\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>)\simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{Ae},\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>)$$

pour tout $\mathrm{i}\geq 1$. Ainsi $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>,\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>)\simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Me},\mathrm{eAe})$ pour tout $\mathrm{i}\geq 1$. Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie, AeA est un idéal source et $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA})<\infty$ alors il suit du lemme 4.4.47 qu'on a le recollement sur les catégories dérivées bornées

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>) \arrow[r, "\mathrm{g}_*"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>,-)"] \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{e}'\mathrm{A},-)"] & \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{e}'\mathrm{Ae}') \arrow[l, bend right, "-\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'}\mathrm{e}'\mathrm{A}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'}(\mathrm{Ae}',-)"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{e}'=1-\mathrm{e}$ et $\mathrm{g}_*=\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>,-)$.
Il suit également du théorème 4.4.32 que $\mathrm{dp}(<\mathrm{e}'>_{\mathrm{A}})<\infty$. De même il suit de la proposition 1.1.12 que $\mathrm{dp}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>_{\mathrm{A}})<\infty$. Or par hypothèse nous avons $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{A})=0$ pour tout $\mathrm{i}\geq 1$, de plus $\mathrm{dp}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>_{\mathrm{A}})<\infty$, il suit du lemme 4.4.37 que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>)=0$ pour tout $\mathrm{i}\geq 1$. Par suite, nous avons $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Me},\mathrm{eAe})=0$ pour tout $\mathrm{i}\geq 1$ ce qui montre que Me est un eAe-module de Cohen-Macaulay.

(c) $\mathbf{Hom_{eAe}(Ae,-):mod(eAe)\to mod(A)}$. Soit M un eAe-module de Cohen-Macaulay. Nous voulons montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},\mathrm{M})$ est un A-module de Cohen-Macaulay. Pour ce faire nous utiliserons la proposition 4.4.43. On a la décomposition suivante en tant que eAe-modules $\mathrm{Ae}\simeq\mathrm{eAe}\oplus\mathrm{e}'\mathrm{Ae}$ ainsi $\mathrm{Ae}\simeq\mathrm{eAe}$ car AeA est un idéal source. Nous en déduisons que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},\mathrm{M})\simeq\mathrm{M}$. Il reste à prouver que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},\mathrm{M}),\mathrm{I})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{I})=0$ pour tout $\mathrm{A}/{<}\mathrm{e}{>}$-module injectif I. AeA étant un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que nous avons cet isomorphisme de K-algèbres

$$\mathrm{A}/<\mathrm{e}'>\simeq\mathrm{eAe}.$$

M étant un eAe-module équivaut à dire que M est un $A/<e'>$-module. Il suit du théorème 4.3.17 que nous avons $M \simeq Me$ et $I \simeq Ie'$. Ainsi nous avons

$$\mathrm{Hom_A(M, I) \simeq Hom_A(Me, Ie')}.$$

Soit $\mathrm{f \in Hom_A(Me, Ie')}$, ceci donne que $\mathrm{f(me) = ie'}$ ce qui implique que $\mathrm{f(me)e = ie'e = 0}$. D'où $\mathrm{f(me)e = f(me^2) = f(me) = 0}$. Nous en déduisons que, pour tout $\mathrm{f \in Hom_A(Me, Ie')}$, nous avons $\mathrm{f = 0}$. Par conséquent, $\mathrm{Hom_A(Hom_{eAe}(Ae, M), I) \simeq Hom_A(M, I) = 0}$.

(d) Étudions le foncteur $- \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/<\mathbf{e}> : \mathbf{mod}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{A}/<\mathbf{e}>)$. Soit M un A-module de Cohen-Macaulay. Nous voulons montrer que $\mathrm{M \otimes_A A}/<\mathrm{e}>$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et $\mathrm{dp}({}_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}) < \infty$, $\mathrm{dp}(\mathrm{Ae}_{\mathrm{eAe}}) < \infty$, alors en vertu de la proposition 4.4.51 $\mathrm{M \otimes_A A}/<\mathrm{e}>$ est un A/<e>-module de Cohen-Macaulay.

(e) Étudions le foncteur $\mathbf{inc} : \mathbf{mod}(\mathbf{A}/<\mathbf{e}>) \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{A})$. Soit M un A/<e>-module de Cohen-Macaulay. Nous voulons montrer que M est A-module de Cohen-Macaulay. Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et AeA est un idéal source alors le résultat s'ensuit en vertu de la proposition 4.4.48.

(f) Étudions le foncteur $\mathbf{Hom_A(A}/<\mathbf{e}>, -) : \mathbf{mod}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{mod}(\mathbf{A}/<\mathbf{e}>)$. Soit M un A-module de Cohen-Macaulay. Nous voulons montrer que $\mathrm{Hom_A(A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M})$ est un A/<e>-module de Cohen Macaulay. Puisque A est une K-algèbre de Gorenstein de dimension finie et AeA est un idéal source, alors le résultat découle de la proposition 4.4.53.

Il reste à prouver que $\mathrm{Im(inc) = Ker(Hom_A(eA, -))}$. Il est évident que

$$\mathrm{Im(inc) \subseteq Ker(Hom_A(eA, -))}.$$

Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, -))$. Donc $\mathrm{X} \in \mathrm{CM}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Xe} = 0$. Il reste à montrer que $\mathrm{X} \in \mathrm{CM}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >)$ c'est à dire que

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{X}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) = 0 \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1.$$

Puisque AeA est un idéal stratifiant alors il suit de la définition 4.2.1 que

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{X}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1.$$

Comme AeA est un idéal source alors il suit de la proposition 4.3.16 qu'on a l'isomorphisme de A-modules $\mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \simeq \mathrm{e}'\mathrm{A}$. $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ étant un facteur direct de A et $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = 0 \ \forall \ \mathrm{i} \geq 1$ donne que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. D'où $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{X}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, -)) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{inc}).$$

Par conséquent, $\mathrm{Im}(\mathrm{inc}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, -))$.

2. se montre de façon analogue à 1.

□

Exemple 4.5.2. Soit A la K-algèbre de chemins munie des relations ci-dessous

$$\mathrm{Q} = \ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} 5$$

$$\alpha_1\alpha_2 = 0 = \alpha_2\alpha_3 = \alpha_3\alpha_4.$$

Posons $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$ on en déduit que AeA est un idéal source. La dimension globale de A est 4 donc A est 4-Gorenstein. La K-algèbre de carquois $\mathrm{C} = \mathrm{eAe}$ muni de la relation ci-contre est représentée ci-dessous

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{C}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{eAe}} = \ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3$$

$$\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

La K-algèbre $B = A/ < e >$ est donnée par le carquois

$$Q_B = Q_{A/<e>} = \ 4 \xrightarrow{\alpha_4} 5$$

Les hypothèses du théorème étant satisfaites, on a le recollement sur les catégories de modules de Cohen-Macaulay

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CM}(A/<e>) \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{CM}(A) \arrow[l, bend right, "-\otimes_A A/<e>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_A(A/<e>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(eA,-)"] & \mathrm{CM}(eAe). \arrow[l, bend right, "-\otimes_{eAe} eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"]
\end{tikzcd}$$

Nous représentons ci-dessous les A-modules projectifs

$$P_1 = \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \ ; \ P_2 = \begin{matrix}2\\3\end{matrix} \ ; \ P_3 = \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \ P_4 = \begin{matrix}4\\5\end{matrix} \ ; \ P_5 = \ 5 \ .$$

Considérons les modules suivants :

$\mathbf{L} = \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \oplus \begin{matrix}4\\5\end{matrix}$ est un A-module de Cohen-Macaulay. En effet, **L** est un A-module projectif.

$\mathbf{M} = \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \oplus \begin{matrix}2\\3\end{matrix}$ est un eAe-module de Cohen-Macaulay. En effet, M est un eAe-module projectif.

$\mathbf{N} = \begin{matrix}4\\5\end{matrix}$ est un $A/<e>$-module de Cohen-Macaulay. En effet, N est un $A/<e>$-module projectif.

Les modules ci-dessous représentent les images des modules de Cohen-Macaulay ci-dessus via les six foncteurs respectifs du recollement défini par Cline, Parshall et Scott.

— $\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ est un A-module de Cohen-Macaulay.

— **Le** est un eAe-module de Cohen-Macaulay.

— $\mathbf{Hom_{eAe}}(\mathbf{Ae}, \mathbf{M})$ est un A-module de Cohen-Macaulay.

— $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ est un $A/ < e >$-module de Cohen-Macaulay.

— **N** est un **A**-module de Cohen-Macaulay.

— $\mathbf{Hom_A}(\mathbf{A}/ < \mathbf{e} >, \mathbf{L})$ est un $A/ < e >$-module de Cohen-Macaulay.

CHAPITRE 5

Recollement et modules inclinants

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés à la restriction aux catégories de modules de Cohen-Macaulay dans le recollement défini par Cline, Parshall et Scott. Il a été prouvé que ce recollement peut être obtenu sous certaines hypothèses. Le présent chapitre traite principalement des recollements et des modules inclinants. Autrement dit, nous nous focalisons sur la préservation de l'inclinaison par les six foncteurs qui définissent le diagramme ci-contre :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mod}\ A/\langle e\rangle \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ A \arrow[l, bend right, "-\otimes_{A}A/\langle e\rangle"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{A}(A/\langle e\rangle,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{A}(eA,-)"] & \mathrm{mod}\ eAe. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{eAe}eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"]
\end{tikzcd}$$

Sans nul doute, nous pouvons affirmer que la préservation n'est pas assurée par tous les foncteurs. En effet, la raison est simple, les K-algèbres A/<e> et eAe sont des quotients de l'algèbre A et donc inférieures en terme de rangs de groupes de Grothendieck. En effet, il y a moins d'idempotents primitifs orthogonaux. Par conséquent la troisième propriété de la définition 5.1.1 n'est pas satisfaite par certains foncteurs.

5.1 Modules inclinants et propriétés

La théorie de l'inclinaison a été motivée par l'introduction des foncteurs de reflexion dans [13] ; ces foncteurs ont été utilisés pour relier les représentations de deux carquois. Ils ont été reformulés dans [6] et généralisés dans [15] qui ont introduit les foncteurs inclinants. Deux années plus tard, il a été défini dans [33] les algèbres inclinées et les modules inclinants. Cette théorie a été développée dans le début des années 70 et depuis lors elle ne cesse de susciter un grand intérêt en théorie des représentations. Toujours dans la même perspective d'apporter notre pierre à l'édifice, nous nous sommes penchés sur la préservation de l'inclinaison par le recollement défini par Cline, Parshall et Scott.

Définition 5.1.1 ([33]). Soit A une K-algèbre de dimension finie. Un A-module T de type fini est dit **inclinant** si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{T},\mathrm{T}) = 0$ ce qui équivaut à dire que T est un A-module rigide ;
2. $\mathrm{dp(T)} \leq 1$;
3. Il existe une suite exacte courte $0 \to \mathrm{A} \to \mathrm{T_0} \to \mathrm{T_1} \to 0$ avec les $\mathrm{T_0}, \mathrm{T_1} \in \mathrm{addT}$.

La troisième condition peut être remplacée par celle-ci en présence des deux premières : Le nombre de facteurs directs d'indécomposables deux à deux non-isomorphes de T est égal au nombre de A-modules simples à isomorphisme près [14].

Remarque 5.1.2. Dans la définition précédente **addT** représente la sous-catégorie de modA se composant des facteurs directs des sommes directes finies de copies de T.

Exemple 5.1.3. $\mathrm{A_A}$ en tant que A-module est inclinant.

Exemple 5.1.4. Considérons la K-algèbre de chemins A donnée par le carquois ci-dessous

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de A est représenté par ce diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{P}_1 \arrow[dr] & & \\
 & \mathrm{P}_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed] & & \mathrm{P}_1/\mathrm{S}_3 \arrow[dr] & \\
\mathrm{S}_3 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & \mathrm{S}_2 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & \mathrm{S}_1
\end{tikzcd}$$

Les modules projectifs indécomposables de A sont

$$\mathrm{P}_1 = \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array},\ \mathrm{P}_2 = \begin{array}{c}2\\3\end{array},\ \mathrm{P}_3 = \ 3$$

alors que les modules injectifs indécomposables de A sont

$$\mathrm{I}_1 = \ 1\ ,\ \mathrm{I}_2 = \begin{array}{c}1\\2\end{array},\ \mathrm{I}_3 = \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}.$$

Posons

$$\mathrm{T} = \ 1 \ \oplus \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} \oplus \ 3$$

Montrons que T est un A-module inclinant.

1. Il suit du théorème 3.1.22 que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{T},\mathrm{T}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(1,3) = \mathrm{D}\overline{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}}(3,\tau 1) = \mathrm{D}\overline{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}}(3,2) = 0.$$

2. $\mathrm{dp}(\mathrm{T}) \leq 1$, en effet l'algèbre est héréditaire.

3. Nous avons les suites exactes courtes suivantes

$$0 \to \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix}2\\3\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \to 1 \to 0$$

$$0 \to 3 \to 3 \to 0.$$

Ce qui conduit à la suite exacte courte souhaitée.

$$0 \to \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \oplus 3 \oplus \begin{matrix}2\\3\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \oplus \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \oplus 3 \to 1 \to 0$$

$0 \to \mathrm{A} \to \mathrm{T}_0 \to \mathrm{T}_1 \to 0$ avec

$$\mathrm{A} = \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \oplus 3 \oplus \begin{matrix}2\\3\end{matrix}$$

$$\mathrm{T}_1 = \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \oplus \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \oplus 3\ , \quad \mathrm{T}_0 = 1\ .$$

Les T_i appartiennent à addT pour tout $\mathrm{i} = 0, 1$.

Remarque 5.1.5. Tout module qui satisfait aux deux premières propriétés d'un module inclinant est dit **inclinant partiel**.

Remarque 5.1.6. Tout A-module projectif est inclinant partiel.

Theorême 5.1.7 ([14])**.** Tout A-module inclinant partiel est facteur direct d'un A-module inclinant.

Définition 5.1.8. Un A-module inclinant T est dit **d'Auslander-Reiten-Platzeck (APR)** s'il existe un simple projectif non injectif S_i tel que : $\mathrm{T} = \oplus_{\mathrm{j}\neq\mathrm{i}}\mathrm{P}_\mathrm{j} \oplus \tau^{-1}\mathrm{S}_\mathrm{i}$, où τ^{-1} est l'inverse de la translation d'Auslander-Reiten.

Exemple 5.1.9. Reprenons l'exemple ci-dessus. Nous savons que $\mathrm{P}_3 = \mathrm{S}_3$ est un simple projectif non injectif alors $\mathrm{T}' = \mathrm{P}_1 \oplus \mathrm{P}_2 \oplus \tau^{-1}\mathrm{S}_3$ est un APR-module inclinant. En se référant au carquois d'Auslander-Reiten nous trouvons $\tau^{-1}\mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_2$. Ainsi

$$\mathrm{T}' = \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\3\end{array} \oplus 2$$

est un A-module inclinant.

5.2 Préservation de l'inclinaison

Dans la section précédente nous avons fait un bref survol de la théorie de l'inclinaison, en expliquant l'historique et en rappelant quelques propriétés essentielles à la compréhension de ce chapitre. Comme son titre l'évoque, nous nous intéressons dans cette section à la préservation de l'inclinaison par les foncteurs qui composent le recollement défini par Cline, Parshall et Scott. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Alors nous avons le recollement suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mod}\ \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ \mathrm{A} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{mod}\ \mathrm{eAe}. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

Les trois foncteurs ci-dessous ne préservent pas l'inclinaison. En effet, les K-algèbres $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ et eAe sont des quotients de l'algèbre A et donc inférieures en terme de rangs de groupes de Grothendieck.

1. $\mathbf{- \otimes_{eAe} eA : modeAe \to modA}$
2. $\mathbf{Hom_{eAe}(Ae, -) : modeAe \to modA}$
3. $\mathbf{inc : mod(A/ < e >) \to modA}$

À présent, étudions la préservation des trois autres foncteurs restants.

1. $-\otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} > : \mathbf{modA} \to \mathbf{modA}/ < \mathbf{e} >$

2. $\mathbf{Hom_A}(\mathbf{A}/ < \mathbf{e} >, -) : \mathbf{modA} \to \mathbf{modA}/ < \mathbf{e} >$

3. $\mathbf{Hom_A}(\mathbf{eA}, -) : \mathbf{mod(A)} \to \mathbf{modeAe}$

Soit T un A-module inclinant quelconque.

Question 1 : $\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ est-il un A/<e>-module inclinant ?

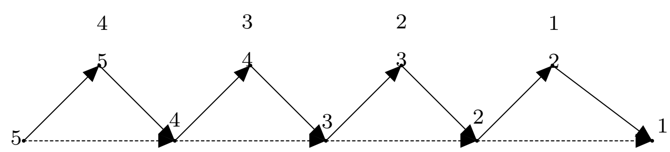
Si $\mathrm{T} = \mathrm{A_A}$, cela implique que $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \simeq \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >$ qui est un A/<e>-module inclinant . Traitons le cas où $\mathrm{T} \neq \mathrm{A_A}$.

Exemple 5.2.1. Soit A la K-algèbre de chemins munie des relations suivantes

$$\mathrm{Q_A} = \ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} 5$$

$$\alpha_1\alpha_2 = 0 = \alpha_2\alpha_3 = \alpha_3\alpha_4$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de A est représenté ci-dessous



Le module

$$\mathrm{T} = \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \oplus \begin{matrix}2\\3\end{matrix} \oplus \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}4\\5\end{matrix} \oplus \tau^{-1}\mathrm{S}_5 = \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \oplus \begin{matrix}2\\3\end{matrix} \oplus \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}4\\5\end{matrix} \oplus 4$$

est APR-inclinant.

Posons $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$. Ainsi on a la K-algèbre de chemins $\mathrm{B} = \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >$ munie de la relation ci-contre

$$\mathrm{Q_B} = \ 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} 5$$

$$\alpha_3\alpha_4 = 0$$

L'algèbre opposée de A est donnée par le carquois ci-dessous suivant muni des relations ci-contre

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{op}}} = \ 5 \xrightarrow{\alpha_4} 4 \xrightarrow{\alpha_3} 3 \xrightarrow{\alpha_2} 2 \xrightarrow{\alpha_1} 1$$

$$\alpha_4\alpha_3 = 0 = \alpha_3\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$$

De même l'algèbre opposée de A/<e> est donnée par le carquois ci-dessous muni de la relation ci-contre

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{B}^{\mathbf{op}}} = \ 5 \xrightarrow{\alpha_4} 4 \xrightarrow{\alpha_3} 3$$

$$\alpha_4\alpha_3 = 0$$

$$\mathbf{A}/<\mathbf{e}> = \begin{matrix}5\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}4\\3\end{matrix} \oplus \ 3 \ = \mathrm{Ae}_5 \oplus \mathrm{Ae}_4 \oplus \mathrm{S}_3$$

Nous avons la décomposition de

$\mathrm{T} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \simeq \mathrm{T} \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{Ae}_5 \oplus \mathrm{Ae}_4 \oplus \mathrm{S}_3) \simeq \mathrm{T}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{Ae}_5 \oplus \mathrm{T}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{Ae}_4 \oplus \mathrm{T}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 \simeq \mathrm{Te}_5 \oplus \mathrm{Te}_4 \oplus \mathrm{T}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3.$

Ainsi $\mathrm{T} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \simeq \mathrm{S}_5 \oplus \mathrm{S}_4 \oplus \mathrm{S}_4 \oplus \mathrm{S}_4 \oplus \mathrm{T}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3$.
Évaluons la quantité ci-dessous

$$\mathrm{T}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 = (\begin{matrix}1\\2\end{matrix} \oplus \begin{matrix}2\\3\end{matrix} \oplus \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}4\\5\end{matrix} \oplus 4)\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 = \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 \oplus \begin{matrix}2\\3\end{matrix} \otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 \oplus \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 \oplus \begin{matrix}4\\5\end{matrix} \otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 \oplus (\mathrm{S}_4\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3).$$

Par suite nous obtenons

$$\begin{matrix}1\\2\end{matrix} \otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 = \mathrm{e}_1\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 = \mathrm{e}_1\mathrm{S}_3 = 0$$

$$\begin{matrix}2\\3\end{matrix} \otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 = \mathrm{e}_2\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 = \mathrm{e}_2\mathrm{S}_3 = 0$$

$$\begin{matrix}3\\4\end{matrix} \otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 = \mathrm{e}_3\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{S}_3 = \mathrm{e}_3\mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_3$$

$$\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\otimes_A S_3 = e_4 A \otimes_A S_3 = e_4 S_3 = 0.$$

Nous en déduisons que,

$$T \otimes_A A/<e> \simeq S_5 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_3 \oplus (S_4 \otimes_A S_3).$$

On peut vérifier aisément que $dp(S_3)_{A/<e>} = 2$. Par conséquent $T \otimes_A A/<e>$ n'est pas un A/<e>-module inclinant.

Conclusion 5.2.2. L'exemple montre que si $T \neq A_A$, qui est A-module inclinant alors, $T \otimes_A A/<e>$ n'est pas toujours un A/<e>-module inclinant.

Question 2 : $\mathbf{Hom_A(A/<e>, T)}$ est-il un A/<e>-module inclinant ?

Soit A la K-algèbre de chemins munie de la relation suivante

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd} \qquad \beta\alpha=0$$

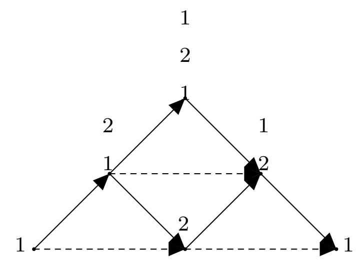
Posons $e = e_1$, alors la K-algèbre de chemins $B = A/<e>$ est donnée par le carquois ci-dessous

$$Q_B = \quad \bullet 2.$$

Les A-modules projectifs sont représentés ci-dessous

$$P_1 = \begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix} \; ; \quad P_2 = \begin{matrix}2\\1\end{matrix} \; .$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de A est représenté ci-contre



Puisque A est un A-module inclinant alors qu'en est t-il de son image obtenu via le foncteur $\mathbf{Hom_A}(\mathbf{A}/<\mathbf{e}>,-)$. Nous avons les modules suivants

$$\mathrm{A_A} = \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\1\end{array}$$

et

$$(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} = \ 2\ .$$

Par suite nous obtenons

$$\mathrm{Hom_A}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{A}) = \mathrm{Hom_A}(\ 2\ ,\ \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\1\end{array}) = 0.$$

Donc $\mathrm{Hom_A}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{A}) = 0$, est un A/<e>-module nul qui est inclinant partiel mais pas inclinant.

Conclusion 5.2.3. L'exemple montre que si $\mathrm{T} = \mathrm{A_A}$, qui est un A-module inclinant alors $\mathrm{Hom_A}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{T})$ n'est pas toujours un A/<e>-module inclinant.

La proposition qui suit montre que $\mathrm{Hom_A}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{A})$ est un A/<e>-module inclinant sous l'hypothèse AeA est un idéal source.

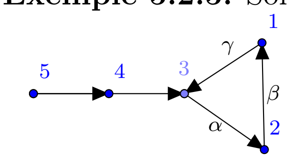
Proposition 5.2.4. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal source. Si le foncteur $\mathrm{Hom_A}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)$ préserve $\mathrm{A_A}$ en tant que A-module projectif alors $\mathbf{Hom_A}(\mathbf{A}/<\mathbf{e}>,\mathbf{A})$ est un A/<e>-module inclinant.

Preuve. Puisque AeA est un idéal source, il suit du théorème 4.3.17 qu'on a l'isomorphisme de A-modules

$$\mathrm{Hom_A(A/<e>,A) \simeq Hom_A(e'A,A) \simeq Ae' \simeq e'Ae' \oplus eAe'}.$$

Comme par, hypothèse, ce dernier est un A-module projectif, $\mathrm{eAe'} \in \mathrm{add(e'Ae')}$ et $\mathrm{Ae'}$ est un $\mathrm{A/<e> \simeq e'Ae'}$-module inclinant. □

Exemple 5.2.5. Soit A la K-algèbre de chemins munie des relations ci-contre



$\alpha\beta = 0 = \beta\gamma = \gamma\alpha.$

Posons $\mathrm{e = e_4 + e_5}$. La K-algèbre de chemins $\mathrm{B = A/<e>}$ munie des relations ci-contre est représentée ci-dessous

$$\mathrm{Q_B = Q_{A/<e>}} = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 3 \arrow[ur, "\alpha"] & & 1 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

$\alpha\beta = 0 = \beta\gamma = \gamma\alpha.$

Le module

$$\mathrm{A_A} = \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

est A-inclinant. Nous en déduisons que

$$\mathrm{H = Hom_A(A/<e>,A) = Ae'} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

est un A/<e>-module inclinant (qui n'est pas sobre).

Question 3 : $\mathbf{Hom_A(eA, T)}$ est-il un eAe-module inclinant ?

Traitons le cas où $\mathrm{T = A_A}$. Nous obtenons respectivement Ae comme eAe-module. Vérifions si ce module est eAe-inclinant.

Soit A la K-algèbre de chemins muni de la relation ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, bend right, "\alpha"'] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, bend right, "\beta"'] \end{tikzcd} \qquad \beta\alpha\beta=0.$$

Posons $e = e_1$ et $C = eAe$. Dans ce qui suit P_i^C et I_i^C représentent respectivement les C-modules projectif et injectif au sommet i. C est la K-algèbre de chemins du carquois

$$Q_C = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\delta"] \end{tikzcd}$$

muni de la relation $\delta^2 = 0$. Puisque $A_A = eA \oplus e_2A$ alors $Ae = eAe \oplus e_2Ae$
$P_1^C = I_1^C = eAe$ et $e_2Ae = S_1$. Notre objectif est de prouver que Ae n'est pas un eAe-module rigide. Pour ce faire, nous procèderons à la décomposition suivante $Ae = eAe \oplus S_1$.

$$\mathrm{Ext}^1_{eAe}(Ae, Ae) \simeq \mathrm{Ext}^1_{eAe}(eAe \oplus S_1, eAe \oplus S_1) \simeq \mathrm{Ext}^1_{eAe}(S_1, S_1) \neq 0.$$

En effet, la suite exacte suivante n'est pas scindée

$$0 \to \ 1 \ \to \ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \ \to 1 \to 0.$$

Puisque $\mathrm{Ext}^1_{eAe}(S_1, S_1) \neq 0$ alors Ae n'est pas un eAe-module rigide par conséquent il n'est pas inclinant.

Conclusion 5.2.6. Nous venons de prouver que pour un A-module inclinant T le eAe-module Te n'est pas toujours un eAe-module inclinant.

La proposition qui suit montre que Ae est un eAe-module inclinant sous l'hypothèse AeA un A-module projectif. Voici le résultat.

Proposition 5.2.7. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Si AeA est un A-module projectif alors **Ae** est un eAe-module inclinant.

Avant de prouver la proposition 5.2.7 nous allons énoncer le lemme suivant.

Lemme 5.2.8 ([60]). Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Si J est un A-module stratifiant alors $\mathrm{dp}(\mathrm{J_A}) = \mathrm{dp}(\mathrm{Je_{eAe}})$.

Preuve. Puisque AeA est un A-module projectif par hypothèse, il suit du lemme 4.2.4 que AeA est un idéal stratifiant. Il suit aussi de la proposition 4.4.30 que si AeA est un idéal stratifiant alors pour tout A-module M nous avons

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{n}+1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M}) \text{ pour tout } \mathrm{n} \geq 1.$$

Posons $\mathrm{n} = 1$ et $\mathrm{M_A} = \mathrm{A_A}$ ce qui implique $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Ae}) \simeq \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{A})$. Nous avons la suite exacte courte suivante $0 \to <\mathrm{e}> \to \mathrm{A} \to \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \to 0$. Il suit de la proposition 1.1.5 que $\mathrm{dp}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)_{\mathrm{A}} \leq 1$. Nous en déduisons que $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{A}) = 0$ d'où $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Ae}) = 0$ donc Ae est un eAe-module rigide. Puisque AeA est un idéal stratifiant alors il suit du lemme 5.2.8 que

$$0 = \mathrm{dp}(\mathrm{AeA_A}) = \mathrm{dp}(\mathrm{Ae_{eAe}}) \text{ donc } \mathrm{dp}(\mathrm{Ae_{eAe}}) \leq 1.$$

Nous avons cette décomposition en tant que eAe-modules $\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe} \oplus \mathrm{e'Ae}$. Nous en déduisons la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \mathrm{eAe} \xrightarrow{\mathrm{inc}} \mathrm{Ae} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathrm{e'Ae} \longrightarrow 0\,.$$

Par conséquent Ae est un eAe-module inclinant. □

Corollaire 5.2.9. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Si AeA est un idéal source alors Ae est un eAe-module inclinant.

Preuve. En vertu de la proposition 4.3.16 si AeA est un idéal source alors AeA est un A-module projectif. Donc le résultat s'ensuit d'après la proposition 5.2.7. □

5.3 Résultat général

Dans cette section nous allons présenter un résultat généralisant tout ce que nous avons fait sur la préservation des modules inclinants par les foncteurs qui composent le recollement défini par Cline, Parshall et Scott. Ce résultat est obtenu grâce à la notion phare que nous avons définie, en l'occurrence l'idéal source et quelques conditions supplémentaires. Nous savons que certains foncteurs ne préservent guère l'inclinaison.

Theorème 5.3.1. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal source. Considérons le recollement suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}\ A/<e> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ A \arrow[l, bend right, "-\otimes_A A/<e>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_A(A/<e>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(eA,-)"] & \mathrm{mod}\ eAe.. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{eAe} eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"] \end{tikzcd}$$

Supposons que $\mathbf{L_A}$ est un A-module inclinant, $\mathbf{M_{A/<e>}}$ est un A/<e>-module inclinant et $\mathbf{N_{eAe}}$ est un eAe-module inclinant. Alors les résultats suivants sont vérifiés :

1. **Le** est un eAe-module inclinant.
2. Posons $\mathbf{L} = \oplus_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{L_i}$ avec les $\mathbf{L_i}$ des indécomposables deux à deux non-isomorphes tel que la K-algèbre A/<e> admette m simples (m < n). Si $\mathbf{Hom_A(A/<e>, L)}$ possède m facteurs directs deux à deux non-isomorphes tel que le foncteur $\mathbf{Hom_A(A/<e>, -)}$ préserve les A-modules projectifs alors $\mathbf{Hom_A(A/<e>, L)}$ est un A/<e>-module inclinant.
3. Si eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif alors $\mathbf{L \otimes_A A/<e>}$ est un A/<e>-module inclinant.
4. $\mathbf{M_A}$ est un A-module inclinant partiel.
5. Posons $\mathbf{N} = \oplus_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{t}} \mathbf{N_i}$ avec les $\mathbf{N_i}$ des indécomposables deux à deux non-isomorphes. Si les $\mathbf{N_i}$ sont des A-modules de dimension projective au plus 1 alors $\mathbf{Hom_{eAe}(Ae, N)}$ est un A-module inclinant partiel.

6. Si eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif alors $\mathbf{N} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ est un A-module inclinant partiel.

Remarque 5.3.2. Dans ce qui suit, $\mathcal{P}roj(A)$ désigne la sous-catégorie de modA formée des projectifs.

Avant de prouver le théorème, nous aimerions énoncer ce lemme.

Lemme 5.3.3 ([4])**.** Soient A une K-algèbre et I un idéal bilatère. Pour tout A-module L_A on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & L \otimes_A A/I & \rightarrow & L/LI \\ & & x \otimes (a + I) & \mapsto & xa + LI \end{array}$$

pour tout $x \in L, a \in A$

Maintenant nous sommes en mesure de prouver le théorème.

Preuve. 1. (i) Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que nous avons respectivement les isomorphismes de A^{op}-modules et de K-algèbres

$$A/ < e' > \simeq Ae, \quad A/ < e' > \simeq eAe.$$

$A/ < e' >$ étant un A^{op}-module projectif, il suit de la proposition 4.3.9 qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^i_{A/<e'>}(L \otimes_A A/ < e' >, L \otimes_A A/ < e' >) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(L, L \otimes_A A/ < e' >) \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Ainsi l'isomorphisme obtenu ci-dessus devient

$$\mathrm{Ext}^i_{eAe}(L \otimes_A Ae, L \otimes_A Ae) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(L, L \otimes_A Ae) \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}^i_{eAe}(Le, Le) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(L, Le)$ pour tout $i \geq 0$. En particulier pour $i = 1$ nous avons : $\mathrm{Ext}^1_{eAe}(Le, Le) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(L, Le)$.

Puisque AeA est un idéal source, il suit du théorème 4.3.17 qu'on a l'existence de cette suite exacte courte suivante $0 \to \mathrm{Le}' \to \mathrm{L} \to \mathrm{Le} \to 0$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, -)$ à cette suite, nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{Le}') \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{L}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{Le}) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{Le}') \to \cdots$$

Puisque par hypothèse, $\mathrm{dp}(\mathrm{L}) \leq 1$ alors $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{Le}') = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{L}) = 0$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{Le}) = 0$, par conséquent $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Le}, \mathrm{Le}) = 0$ donc Le est un eAe-module rigide.

(ii) Puisque $\mathrm{dp}(\mathrm{L}_{\mathrm{A}}) \leq 1$, il existe une résolution projective du type
$0 \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_0 \to \mathrm{L} \to 0$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, -)$ à cette suite exacte courte alors nous obtenons : $0 \to \mathrm{P}_1\mathrm{e} \to \mathrm{P}_0\mathrm{e} \to \mathrm{Le} \to 0$. Il suit du théorème 4.3.17 que $\mathrm{P}_{\mathrm{i}}\mathrm{e}$ est un eAe-module projectif pour tout $\mathrm{i} = 0, 1$ ce qui équivaut à dire que $\mathrm{dp}(\mathrm{Le}_{\mathrm{eAe}}) \leq 1$.

(iii) On a l'existence de $0 \to \mathrm{A} \to \mathrm{L}_0 \to \mathrm{L}_1 \to 0$ avec $\mathrm{L}_{\mathrm{i}} \in \mathrm{add}(\mathrm{L})$ pour tout $\mathrm{i} = 0, 1$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, -)$ à cette suite exacte courte alors nous avons $0 \to \mathrm{Ae} \to \mathrm{L}_0\mathrm{e} \to \mathrm{L}_1\mathrm{e} \to 0$. Or si AeA est un idéal source alors nous avons un isomorphisme de eAe-modules $\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe}$ ainsi notre suite devient $0 \to \mathrm{eAe} \to \mathrm{L}_0\mathrm{e} \to \mathrm{L}_1\mathrm{e} \to 0$. Par conséquent Le est un eAe-module inclinant.

2. (i) Puisque AeA est un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que

$$\mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \simeq \mathrm{e}'\mathrm{A}.$$

De même en vertu du théorème 4.3.17 nous avons l'isomorphisme suivant

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{L}) \simeq \mathrm{Le}'.$$

Puisque $\mathbf{Hom_A(A/ < e >, -)}$ préserve les A-modules projectifs, il s'ensuit que Le' est un $\mathrm{e}'\mathrm{Ae}'$-module rigide.

(ii) $dp(L_A) \leq 1$ implique qu'il existe une résolution projective du type

$$0 \to P_1 \to P_0 \to L \to 0$$

avec P_0 et P_1 des A-modules projectifs. Appliquons le foncteur exact $Hom_A(e'A, -)$ à cette suite exacte courte. Alors nous obtenons la suite exacte courte suivante $0 \to P_1e' \to P_0e' \to Le' \to 0$ avec $P_ie' \in \mathcal{P}roj(e'Ae') \simeq \mathcal{P}roj(A/<e>)$ car $\mathbf{Hom_A(A/<e>, -)}$ préserve les A-modules projectifs par hypothèse.

(iii) Puisque $Hom_A(A/<e>, L)$ possède m facteurs directs indécomposables deux à deux non-isomorphes et m est égal au nombre de simples de la K-algèbre $A/<e>$, par conséquent, $\mathbf{Hom_A(A/<e>, L)}$ est un $A/<e>$-module inclinant.

3. Nous voulons montrer que $L \otimes_A A/<e>$ est un $A/<e>$-module inclinant sous les hypothèses AeA un idéal source et eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif.

(i) Puisque $dp(L_A) \leq 1$ il existe une résolution projective du type $0 \to P_1 \to P_0 \to L \to 0$. Appliquons le foncteur $- \otimes_A A/<e>$ à cette suite. Alors nous obtenons la suite exacte

$$0 \to Tor_1^A(L, A/<e>) \to P_1 \otimes_A A/<e> \to P_0 \otimes_A A/<e> \to L \otimes_A A/<e> \to 0$$

Puisque AeA est un idéal stratifiant alors nous avons

$$Tor_1^A(L, A/<e>) \simeq Tor_2^{eAe}(Le, eA) = 0$$

car eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif. Ainsi nous avons

$$0 \to P_1 \otimes_A A/<e> \to P_0 \otimes_A A/<e> \to L \otimes_A A/<e> \to 0$$

Comme P_i est un A-module projectif alors $P_i \otimes_A A/<e>$ est un $A/<e>$-module projectif pour tout $i = 0, 1$ (voir corollaire 4.1.6). Puisque AeA est un idéal source alors le foncteur **inc** préserve les projectifs. Ainsi $\mathrm{P_i} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >$ est aussi un A-module projectif pour tout $\mathrm{i} = 0, 1$. D'où $\mathrm{dp}(\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >)_{\mathrm{A}} \leq 1$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) = 0.$$

AeA stratifiant, il suit de la définition 4.2.1 que nous avons

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >, \mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) = 0.$$

(ii) En se référant à (i) nous avons la suite exacte courte suivante

$$0 \to \mathrm{P_1} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to \mathrm{P_0} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to 0$$

Comme $\mathrm{P_i}$ est un A-module projectif alors $\mathrm{P_i} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >$ est un A/<e>-module projectif pour tout $\mathrm{i} = 0, 1$ (voir corollaire 4.1.6) d'où $\mathrm{dp}(\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \leq 1$.

(iii) L étant un A-module inclinant alors on a l'existence de la suite exacte courte suivante

$$0 \to \mathrm{A} \to \mathrm{L_0} \to \mathrm{L_1} \to 0$$

avec $\mathrm{L_i} \in \mathrm{add(L)}$ pour tout $\mathrm{i} = 0, 1$. En appliquant le foncteur $- \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >$ à cette suite exacte courte nous avons la suite exacte longue suivante

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_1(\mathrm{L}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \to \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to \mathrm{L_0} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to \mathrm{L_1} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to 0$$

Or $\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_1(\mathrm{L_1}, \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathrm{eAe}}_2(\mathrm{L_1 e}, \mathrm{eA}) = 0$ car eA est un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif. Ainsi nous obtenons la suite souhaitée

$$0 \to \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to \mathrm{L_0} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to \mathrm{L_1} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \to 0.$$

Nous avons trouvé une suite exacte courte avec $\mathrm{L_i} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} > \in \mathrm{add}(\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/ < \mathrm{e} >)$. Par conséquent, $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ est un A/<e>-module inclinant.

4. (i) Puisque AeA est un idéal source alors il suit du corollaire 4.3.5 que AeA est stratifiant. Alors en vertu de la définition 4.2.1 nous avons cet isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{M},\mathrm{M}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{M}) = 0$$

Par hypothèse, on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{M},\mathrm{M}) = 0$ nous en déduisons que M est un A-module rigide.

(ii) Puisque $\mathrm{dp}(\mathrm{M}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}) \leq 1$, il existe une résolution projective de A/<e>-modules du type $0 \to \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_0 \to \mathrm{M} \to 0$, avec $\mathrm{K}_\mathrm{i} \in \mathcal{P}\mathrm{roj}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>)$ pour $\mathrm{i} = 0, 1$. Puisque AeA est un idéal source alors il suit de la proposition 4.3.16 qu'on a cet isomorphisme de K-algèbres.

$$\mathrm{A}/<\mathrm{e}> \simeq \mathrm{e'Ae'}$$

Donc $0 \to \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_0 \to \mathrm{M} \to 0$ est une résolution projective de e′Ae′-modules. Appliquons le foncteur $- \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'A}$ à cette suite. Alors nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$(1) \quad 0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{e'Ae'}}(\mathrm{M},\mathrm{e'A}) \to \mathrm{K}_1 \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'A} \to \mathrm{K}_0 \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'A} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'A} \to 0$$

Il suit aussi du corollaire 4.1.6 que le foncteur $- \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'A}$ préserve les projectifs ainsi les $\mathrm{K}_\mathrm{i} \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'A}$ sont des A-modules projectifs pour tout $\mathrm{i} = 0, 1$. Or nous avons cette décomposition en tant que $(\mathrm{e'Ae'})^{\mathrm{op}}$-modules $\mathrm{e'A} \simeq \mathrm{e'Ae'} \oplus \mathrm{e'Ae}$ ce qui implique que $\mathrm{e'A} \simeq \mathrm{e'Ae'}$ car AeA est un idéal source. Du coup

$$\mathrm{Tor}_\mathrm{i}^{\mathrm{e'Ae'}}(\mathrm{M},\mathrm{e'A}) \simeq \mathrm{Tor}_\mathrm{i}^{\mathrm{e'Ae'}}(\mathrm{M},\mathrm{e'Ae'}) = 0 \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1 \text{ et}$$

$$\mathrm{K}_\mathrm{i} \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'A} \simeq \mathrm{K}_\mathrm{i} \otimes_{\mathrm{e'Ae'}} \mathrm{e'Ae'} \simeq \mathrm{K}_\mathrm{i}.$$

Par suite, notre suite exacte longue (1) devient $0 \to \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_0 \to \mathrm{M} \to 0$. Ainsi nous obtenons une résolution projective de A-modules. Par conséquent, nous avons

$\mathrm{dp}(\mathrm{M_A}) \leq 1$.

(iii) La troisième propriété de la définition 5.1.1 d'un A-module inclinant n'est pas toujours satisfaite alors nous concluons que M est un A-module inclinant partiel. Ceci achève la preuve.

5. Nous allons montrer que $\mathrm{Hom_{eAe}(Ae, N)}$ est un A-module rigide.

   (i) Nous avons $\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe} \oplus \mathrm{e'Ae}$ en tant que eAe-modules, et puisque AeA est idéal source alors on a $\mathrm{Ae} \simeq \mathrm{eAe}$. Il s'ensuit que $\mathrm{Hom_{eAe}(Ae, N)} \simeq \mathrm{N}$. Puisque AeA est un idéal source alors il suit de la proposition 4.3.16 qu'on a $\mathrm{A}/ < \mathrm{e}' > \simeq \mathrm{eAe}$ en tant que K-algèbres. Puisque AeA est un idéal source alors $\mathrm{Ae'A}$ est un idéal puits donc il suit de la proposition 4.3.16 que $\mathrm{Ae'A}$ est stratifiant. Puisque $\mathrm{Ae'A}$ est stratifiant, il suit de la définition 4.2.1 que

$$0 = \mathrm{Ext^1_{eAe}(N, N)} \simeq \mathrm{Ext^1_{A/<e'>}(N, N)} \simeq \mathrm{Ext^1_A(N, N)}.$$

   Ainsi nous en déduisons que

$$\mathrm{Ext^1_A(Hom_{eAe}(Ae, N), Hom_{eAe}(Ae, N))} \simeq \mathrm{Ext^1_A(N, N)} = 0$$

   Nous en déduisons que $\mathrm{Hom_{eAe}(Ae, N)}$ est un A-module rigide.

   (ii) Si tous les $\mathrm{N_i}$ sont des A-modules de dimension projective au plus égal à 1 alors N l'est aussi d'où

$$\mathrm{dp}((\mathrm{Hom_{eAe}(Ae, N)_A}) \leq 1.$$

   Par conséquent, $\mathrm{Hom_{eAe}(Ae, N)}$ est un A-module inclinant partiel.

   (iii) La troisième propriété de la définition 5.1.1 d'un A-module inclinant n'est pas toujours satisfaite alors nous concluons que $\mathrm{Hom_{eAe}(Ae, N)}$ est un A-module inclinant partiel.

6. (i) Il suit du théorème 4.1.7 que si $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{I}) = 0$ pour tout A/<e>-module injectif I et $\mathrm{i} \geq 0$ alors on a $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{N}, \mathrm{N})$. Pour $\mathrm{i} = 0$ il suit de l'adjonction 1.1.10 que nous avons

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{I}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{N}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, \mathrm{I})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{Ie}) = 0 \text{ car } \mathrm{Ie} = 0.$$

Il reste à prouver que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{I}) = 0$ pour tout $\mathrm{i} \geq 1$. Or

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{I}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{I}))$$

Puisque I est un A/<e>-module injectif alors il suit de la proposition 4.4.31 que nous avons

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{I})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>), \mathrm{I}).$$

Puisque AeA est un idéal stratifiant alors il suit de la proposition 4.4.30 qu'on a cet isomorphisme

$$\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathrm{eAe}}_{\mathrm{i+1}}(\mathrm{N}, \mathrm{eA}) \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1.$$

Nous en déduisons que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{I}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>}(\mathrm{Tor}^{\mathrm{eAe}}_{\mathrm{i+1}}(\mathrm{N}, \mathrm{eA}), \mathrm{I})$. Or par hypothèse eA est un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif alors nous obtenons

$$\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathrm{eAe}}_{\mathrm{i+1}}(\mathrm{N}, \mathrm{eA}) = 0 \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 1 .$$

Ainsi $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{I}) = 0 \ \forall\, \mathrm{i} \geq 1$. Par suite on a

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}) \simeq \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{N}, \mathrm{N}) \text{ pour tout } \mathrm{i} \geq 0.$$

En particulier pour $\mathrm{i} = 1$ nous obtenons ce que nous recherchons

$$\mathrm{Ext}^{1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}) \simeq \mathrm{Ext}^{1}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{N}, \mathrm{N}) = 0.$$

(ii) Puisque $\mathrm{dp}(\mathrm{N}_{\mathrm{eAe}}) \leq 1$ il existe une résolution projective du type $0 \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_0 \to \mathrm{N} \to 0$ avec $\mathrm{P}_{\mathrm{i}} \in \mathcal{P}\mathrm{roj}(\mathrm{eAe})$.

Appliquons le foncteur $-\otimes_{eAe} eA$ à cette suite alors nous obtenons la suite exacte suivante

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{eAe}(N, eA) \to P_1 \otimes_{eAe} eA \to P_0 \otimes_{eAe} eA \to N \otimes_{eAe} eA \to 0.$$

Puisque eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif alors nous avons $\mathrm{Tor}_1^{eAe}(N, eA) = 0$ d'où l'obtention de la résolution projective de $N \otimes_{eAe} eA$

$$0 \to P_1 \otimes_{eAe} eA \to P_0 \otimes_{eAe} eA \to N \otimes_{eAe} eA \to 0$$

en effet, il suit du corollaire 4.1.6 que $P_i \otimes_{eAe} eA \in \mathcal{P}roj(A)$.

(iii) La troisième propriété de la définition 5.1.1 d'un A-module inclinant n'est pas toujours satisfaite. Il s'ensuit que $N \otimes_{eAe} eA$ est un A-module inclinant partiel.

$\square$

L'exemple qui suit illustre bien le théorème ci-dessus.

Exemple 5.3.4. Considérons la K-algèbre de chemins A donnée par le carquois

$$Q = \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

Posons $e = e_1$ alors AeA est un idéal source. Les K-algèbres de chemins eAe et $A/{<}e{>}$ sont données par les carquois ci-dessous

$$Q_C = Q_{eAe} = \quad \bullet 1$$

$$Q_B = Q_{A/<e>} = \ 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

L'algèbre opposée de eAe est donnée par le carquois

$$Q_{C^{op}} = Q_{eAe^{op}} = \quad \bullet 1$$

AeA est un idéal source. On a la décomposition suivante en tant que $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-modules

$$\mathrm{eA} \simeq \mathrm{eAe} \oplus \mathrm{eAe}' \simeq \mathrm{e}_1\mathrm{Ae}_1 \oplus \mathrm{e}_1\mathrm{A}(\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3+\mathrm{e}_4) \simeq \mathrm{e}_1\mathrm{Ae}_1 \oplus \mathrm{e}_1\mathrm{Ae}_2 \oplus \mathrm{e}_1\mathrm{Ae}_3 \oplus \mathrm{e}_1\mathrm{Ae}_4$$

Puisque les K-espaces vectoriels $\mathrm{e}_1\mathrm{Ae}_2, \mathrm{e}_1\mathrm{Ae}_3, \mathrm{e}_1\mathrm{Ae}_4$ sont tous de dimension 1 alors ils sont isomorphes au simple en 1. Ainsi nous obtenons,

$${}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{eA}) = \; 1 \; \oplus \; 1 \; \oplus 1 \oplus 1$$

est un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif. Considérons les modules suivants :

$$\mathrm{L} = \; 4 \; \oplus \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} ; \quad \mathrm{N} = \; 1 \; ; \quad \mathrm{M} = \; 3 \; \oplus \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

On vérifie aisément que L, N et M sont respectivement des A-module, eAe-module et $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$-module inclinants. M est APR-inclinant.

1. Le module $\mathbf{Le} = 1$ est un eAe-module inclinant.
2. Puisque eA est un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif alors $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ est un $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$-module inclinant. Puisque $\mathrm{L} = \mathrm{A}_{\mathrm{A}}$, il s'ensuit que $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/ < \mathbf{e} > \simeq \mathbf{A}/ < \mathbf{e} >$ en tant que $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$-module.

$$(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >)_{\mathrm{A}/<\mathrm{e}>} = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \oplus \; 4$$

3. N'oublions pas aussi que $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ a une structure de A-module ainsi on a :

$$(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >)_{\mathrm{A}} = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \oplus \; 4$$

On voit bien que $(\mathrm{A}/ < \mathrm{e} >)_{\mathrm{A}}$ est un facteur direct de L. Ainsi

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}/ < \mathbf{e} >, \mathbf{L}) \simeq \mathbf{Le}'$$

est un A/<e>-module inclinant. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,\mathrm{L}) = \begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \oplus 4$$

4. $\mathbf{M_A}$ est un A-module inclinant partiel. Ainsi nous obtenons

$$\mathrm{M} = 3 \oplus \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}.$$

5. $\mathbf{Hom_{eAe}(Ae, N)} \simeq \mathbf{N}$ est un A-module inclinant partiel. En effet, il suit du théorème 3.1.22 que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{N},\mathrm{N}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(1,1) \simeq \overline{\mathrm{DHom}_{\mathrm{A}}}(1,\tau 1) \simeq \overline{\mathrm{DHom}}(1,2) = 0$$

et $\mathrm{dp}(\mathrm{S}_1)_{\mathrm{A}} \leq 1$ car A est héréditaire. Donc le résultat s'ensuit.

6. Puisque eA est un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif alors $\mathbf{N} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ est un A-module inclinant partiel. Maintenant vérifions ce que donne la décomposition de $\mathbf{N} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$. Nous avons $\mathbf{N} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA} \simeq \mathbf{N}$. En effet, il suit du corollaire 4.1.6 que pour tout module N, il existe un A/<e>-module tel qu'il existe la suite exacte suivante

$$0 \to \mathrm{K} \to \mathrm{Ne} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \xrightarrow{\mu_{\mathrm{N}}} \mathrm{N} \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{N}}} \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \to 0 \ (1).$$

Puisque AeA est un idéal source alors $\mathrm{K} \simeq \mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_1(\mathrm{N}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>)$. AeA étant un idéal source, il suit de la proposition 4.3.16 que AeA est stratifiant. AeA stratifiant, il suit de la proposition 4.4.30 que $\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_1(\mathrm{N}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathrm{eAe}}_2(\mathrm{Ne}, \mathrm{eA}) = 0$, car eA est un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif. Donc la suite (1) devient

$$0 \to \mathrm{Ne} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \xrightarrow{\mu_{\mathrm{N}}} \mathrm{N} \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{N}}} \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \to 0.$$

Puisque $\mathrm{e} = 1$ alors $\mathrm{Ne} = \mathrm{N}$. Ainsi on a,

$$0 \to \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \xrightarrow{\mu_{\mathrm{N}}} \mathrm{N} \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{N}}} \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \to 0.$$

Il reste à prouver que $N \otimes_A A/<e> = 0$. La K-algèbre opposée de A/<e> est donnée par le carquois

$$Q_{B^{opp}} = Q_{A/<e>^{opp}} = \ 4 \xrightarrow{\gamma} 3 \xrightarrow{\beta} 2$$

Nous avons

$$_{A/<e>}(A/<e>) = \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus 2$$

Il s'ensuit que nous avons

$$N \otimes_A A/<e> = 1 \otimes_A \left(\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus 2 \right) = 1 \otimes_A \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus 1 \otimes_A \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus 1 \otimes_A 2.$$

Considérons la suite exacte courte de A-modules suivante

$$0 \to \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \to 1 \to 0 \quad (\star).$$

Appliquons le foncteur

$$- \otimes_A \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

à cette suite. Alors nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(1, \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}) \to \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \otimes_A \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \otimes_A \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \to 1 \otimes_A \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \to 0.$$

Or

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \otimes_A \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} = e_1 A \otimes_A \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} = e_1 (\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}) = 0.$$

En appliquant le foncteur

$$- \otimes_A \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

à $(\star)$. Alors nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(1, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix} \otimes_{\mathrm{A}} \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix} \otimes_{\mathrm{A}} \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to 1 \otimes_{\mathrm{A}} \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to 0.$$

Or

$$\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix} \otimes_{\mathrm{A}} \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} = \mathrm{e}_1\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} = \mathrm{e}_1(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0.$$

De même en appliquant le foncteur

$$- \otimes_{\mathrm{A}} 2$$

à la suite exacte courte $(\star)$. Alors nous obtenons la suite exacte longue suivante

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(1, 2) \to \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix} \otimes_{\mathrm{A}} 2 \to \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix} \otimes_{\mathrm{A}} 2 \to 1 \otimes_{\mathrm{A}} 2 \to 0.$$

Or

$$\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix} \otimes_{\mathrm{A}} 2 = \mathrm{e}_1\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} 2 = \mathrm{e}_1(2) = 0.$$

Par conséquent $\mathrm{N}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}> = 0$. Ainsi $\mathrm{N}\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA} \simeq \mathrm{N} \simeq \mathrm{S}_1$ qui est un A-module inclinant partiel.

Dans ce qui suit on donne un exemple plus intéressant que le précédent pour le foncteur $\mathbf{Hom_A(A/<e>, -)}$.

Exemple 5.3.5. Considérons la K-algèbre de chemins A donnée par le carquois

$$\mathrm{Q} = \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

Posons $e = e_1 + e_2$ alors AeA est un idéal source. Les modules suivants sont A-inclinants

$$T_1 = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \oplus 3 \ ; \quad T_2 = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus 4 \oplus 1 \ .$$

En effet T_1 est APR-inclinant, la rigidité de T_2 se montre facilement et les autres propriétés s'ensuivent. Par conséquent,

$$\mathrm{Hom}_A(A/<e>, T_1) \simeq T_1 e' = \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \oplus 3 \ ; \quad \mathrm{Hom}_A(A/<e>, T_2) \simeq T_2 e' = \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \oplus 4 \ .$$

5.4 Paires de torsion et recollement

Dans cette courte section nous allons présenter un résultat sur les paires de torsion en utilisant le recollement défini par Cline, Parshall et Scott. De prime abord, nous allons faire un petit survol historique. La notion de paire de torsion a été introduite par Dickson vers la fin des années 60 dans le cadre des catégories abéliennes pour généraliser les notions classiques de torsion dans les groupes abéliens. Depuis lors, plusieurs applications ont été notées dans les domaines tels que l'étude des localisations, la théorie de l'inclinaison et la théorie des catégories.

Définition 5.4.1 ([24])**.** Soit A une K-algèbre de dimension finie. Une paire de torsion dans modA est une paire $t = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories pleines satisfaisant aux deux conditions suivantes

1. $\mathrm{Hom}_A(T, F) = 0$ pour tout $T \in \mathcal{T}$ et $F \in \mathcal{F}$.
2. Pour tout module $M \in \mathrm{mod}A$, il existe une suite exacte courte de cette forme $0 \to T_M \to M \to F_M \to 0$ où $T_M \in \mathcal{T}$ et $F_M \in \mathcal{F}$.
   Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une paire de torsion alors $\mathcal{T}$ est appelée **classe de torsion** et $\mathcal{F}$ est appelée **classe sans torsion**.

La proposition qui suit montre qu'on peut obtenir des paires de torsion via les foncteurs du recollement défini par Cline, Parshall et Scott. Mais avant, nous énoncerons une proposition et un corollaire.

Proposition 5.4.2 ([54]). Soit $\mathbf{R}(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C})$ un recollement de catégories abéliennes représenté par le diagramme ci-contre :

$$\mathbf{R}(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}): \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "i"] & \mathscr{B} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "e"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "l"'] \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

1. Il existe des équivalences de catégories

$$\{\mathrm{B} \in \mathcal{B} \mid \mathrm{ip}(\mathrm{B}) \simeq \mathrm{B}\} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A} \xleftarrow{\simeq} \{\mathrm{B} \in \mathcal{B} \mid \mathrm{iq}(\mathrm{B}) \simeq \mathrm{B}\}$$

En particulier, un objet $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ appartient à $\mathrm{i}(\mathcal{A})$, si et seulement si $\mathrm{iq}(\mathrm{B}) \simeq \mathrm{B}$ si et seulement si $\mathrm{ip}(\mathrm{B}) \simeq \mathrm{B}$.

2. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$. Alors nous avons les suites exactes suivantes :

$$0 \to \mathrm{Ker}\mu_{\mathrm{B}} \to \mathrm{le}(\mathrm{B}) \xrightarrow{\mu_{\mathrm{B}}} \mathrm{B} \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{B}}} \mathrm{iq}(\mathrm{B}) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{ip}(\mathrm{B}) \xrightarrow{\nu_{\mathrm{B}}} \mathrm{B} \xrightarrow{\beta_{\mathrm{B}}} \mathrm{re}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Coker}\beta_{\mathrm{B}} \to 0$$

où les objets $\mathrm{Ker}\mu_{\mathrm{B}}$ et $\mathrm{Coker}\beta_{\mathrm{B}}$ appartiennent à $\mathrm{i}(\mathcal{A})$.

Corollaire 5.4.3. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A. Nous avons le recollement suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{modA}/<\mathrm{e}> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{modA} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{modeAe}. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"] \end{tikzcd}$$

1. Il existe des équivalences de catégories

$$\{\mathrm{M} \in \mathrm{modA} \mid \mathrm{inc}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{M})) \simeq \mathrm{M}\} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{modB} \xleftarrow{\simeq} \{\mathrm{M} \in \mathrm{modA} \mid \mathrm{inc}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}) \simeq \mathrm{M}\}$$

avec $\mathrm{B} = \mathrm{A}/<\mathrm{e}>$. En particulier, un objet $\mathrm{M} \in \mathrm{modA}$ appartient à inc(modB) si et seulement si $\mathrm{inc}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{M}$, si et seulement si $\mathrm{inc}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{M})) \simeq \mathrm{M} \simeq \mathrm{Me} = 0$.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{modA}$. Alors nous avons les suites exactes suivantes dans modA :

$$0 \to \mathrm{Ker}\mu_{\mathrm{M}} \to \mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \xrightarrow{\mu_{\mathrm{M}}} \mathrm{M} \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{M}}} \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M}) \xrightarrow{\nu_{\mathrm{M}}} \mathrm{M} \xrightarrow{\beta_{\mathrm{M}}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \to \mathrm{Coker}\beta_{\mathrm{M}} \to 0$$

où les objets $\mathrm{Ker}\mu_{\mathrm{M}}$ et $\mathrm{Coker}\beta_{\mathrm{M}}$ appartiennent à inc(modB).

Proposition 5.4.4. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A tels qu'il existe un isomorphisme de A-A-bimodules $\mathrm{Ae} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \simeq \mathrm{AeA}$. Nous avons le recollement suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{modA}/<\mathrm{e}> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{modA} \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}/<\mathrm{e}>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA},-)"] & \mathrm{modeAe}. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{\mathrm{eAe}}\mathrm{eA}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae},-)"]
\end{tikzcd}$$

Considérons les classes de modules suivantes :

$\mathcal{T}_1 = \{\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}> \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$,

$\mathcal{T}_2 = \{\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M}) \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$

1. Si $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ est un A^{op}-module projectif (ou eA est un $(\mathrm{eAe})^{\mathrm{op}}$-module projectif) alors $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ est une paire de torsion de modA.

2. Si $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ est un A-module projectif alors $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ est une paire de torsion de modA.

3. En outre $\mathrm{Ker}\mu_{\mathrm{M}} = \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>)$ et $\mathrm{Coker}\beta_{\mathrm{M}} = \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}, \mathrm{A}/<\mathrm{e}>)$.

Preuve. 1. Soit M un A-module. Il suit du théorème d'adjonction 1.1.10 que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA}, \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Me}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{eA}, \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/<\mathrm{e}>)).$$

Or,

$$\mathrm{Hom}_{eAe}(Me, \mathrm{Hom}_A(eA, M \otimes_A A/ < e >)) \simeq \mathrm{Hom}_{eAe}(Me, (M \otimes_A A/ < e >)e) = 0.$$

Nous venons de montrer que pour tous $T_1 \in \mathcal{T}_1$ et $F_1 \in \mathcal{F}_1$ nous avons

$$\mathrm{Hom}_A(T_1, F_1) = 0.$$

Considérons la suite exacte courte de A^{op}-modules

$$0 \to < e > \to A \to A/ < e > \to 0.$$

Appliquons le foncteur $M \otimes_A -$ à cette suite. Alors nous obtenons la suite exacte suivante

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M, A/ < e >) \to M \otimes_A AeA \to M \to M \otimes_A A/ < e > \to 0.$$

Or, par hypothèse $Ae \otimes_{eAe} eA \simeq AeA$ ce qui implique

$$M \otimes_A AeA \simeq M \otimes_A Ae \otimes_{eAe} eA \simeq Me \otimes_{eAe} eA.$$

Ainsi notre suite exacte devient

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M, A/ < e >) \to Me \otimes_{eAe} eA \to M \to M \otimes_A A/ < e > \to 0.$$

Dans le cas où $A/<e>$ est un A^{op}-module projectif alors on a $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/ < e >) = 0$. D'où l'obtention de la suite exacte courte souhaitée

$$0 \to Me \otimes_{eAe} eA \to M \to M \otimes_A A/ < e > \to 0.$$

Dans le cas où eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif alors AeA est un idéal stratifiant. En effet, nous avons par hypothèse cet isomorphisme de A-A-bimodules $Ae \otimes_{eAe} eA \simeq AeA$, et en outre $\mathrm{Tor}_n^{eAe}(Ae, eA) = 0 \ \forall \ n \geq 1$ car eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif. Par suite le résultat s'ensuit d'après la définition 4.2.1. Puisque

AeA est stratifiant alors en vertu de la proposition 4.4.30 nous avons cet isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, A/<e>) \simeq \mathrm{Tor}_{n+1}^{eAe}(Me, eA) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

En particulier pour $n = 1$ ceci donne $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/<e>) \simeq \mathrm{Tor}_2^{eAe}(Me, eA)$. Puisque eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif alors $\mathrm{Tor}_2^{eAe}(Me, eA) = 0$. D'où l'obtention de la suite exacte courte souhaitée $0 \to Me \otimes_{eAe} eA \to M \to M \otimes_A A/<e> \to 0$. Nous voyons dans les deux cas que nous avons la suite recherchée. Par conséquent, nous avons $Me \otimes_{eAe} eA \in \mathcal{T}_1$ et $M \otimes_A A/<e> \in \mathcal{F}_1$. Donc, $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ est une paire de torsion.

2. Soit M un A-module. Il suit du théorème d'adjonction 1.1.10 que nous avons

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B, M), \mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, Me)) \simeq \mathrm{Hom}_{eAe}(\mathrm{Hom}_A(B, M) \otimes_A Ae, Me)$$

$$\mathrm{Hom}_{eAe}((\mathrm{Hom}_A(A/<e>, M))e, Me) = 0 \text{ où } B = A/<e>.$$

En effet, $\mathrm{Hom}_A(A/<e>, M)$ est un $A/<e>$-module. Nous venons de montrer que pour tout $T_2 \in \mathcal{T}_2$ et $F_2 \in \mathcal{F}_2$ nous avons $\mathrm{Hom}_A(T_2, F_2) = 0$. Considérons maintenant la suite exacte courte de A-modules

$$0 \to <e> \to A \to A/<e> \to 0.$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ à cette suite nous obtenons la suite exacte suivante

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A/<e>, M) \to M \to \mathrm{Hom}_A(AeA, M) \to \mathrm{Ext}_A^1(A/<e>, M) \to 0$$

Or, par hypothèse $Ae \otimes_{eAe} eA \simeq AeA$ alors il suit du théorème de l'adjonction 1.1.10 qu'on a $\mathrm{Hom}_A(AeA, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(Ae \otimes_{eAe} eA, M) \simeq \mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, Me)$. Ainsi notre suite devient

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A/<e>, M) \to M \to \mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, Me) \to \mathrm{Ext}_A^1(A/<e>, M) \to 0$$

Puisque A/<e> est un A-module projectif par hypothèse alors on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M}) = 0$. D'où l'obtention de la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M}) \to \mathrm{M} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \to 0$$

Nous voyons bien que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/<\mathrm{e}>, \mathrm{M}) \in \mathcal{T}_2$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \in \mathcal{F}_2$. Par conséquent, $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ est une paire de torsion.

3. Notons que dans les deux diagrammes ci-dessus les suites des lignes inférieures sont obtenues grâce au corollaire 5.4.3. D'après la propriété universelle du noyau nous avons un diagramme commutatif à suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \arrow[r, "\mu_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\mu_{\mathrm{M}} \arrow[r] & \mathrm{Me} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r] & \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'après la propriété universelle du conoyau nous avons un diagramme commutatif à suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{M} \arrow[r, "\beta_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{M}) \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{eAe}}(\mathrm{Ae}, \mathrm{Me}) \arrow[r] & \mathrm{Coker}\beta_{\mathrm{M}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Le corollaire qui suit nous permet de trouver plus facilement des exemples dans la pratique.

Corollaire 5.4.5. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A.

1. Si AeA est un idéal puits alors $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ est une paire de torsion où dans ce cas, $\mathcal{T}_1 = \{\mathrm{Me} \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{\mathrm{Me}' \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$.

2. Si AeA est un idéal source alors $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ est une paire de torsion où dans ce cas, $\mathcal{T}_2 = \{\mathrm{Me}' \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\mathrm{Me} \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}$

Preuve. 1. Supposons que AeA est un idéal puits. Alors en vertu de la proposition 4.3.16 nous avons cet isomorphisme de $\mathrm{A^{op}}$-modules $\mathrm{A}/<\mathrm{e}> \simeq \mathrm{Ae}'$. Ainsi $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ est un $\mathrm{A^{op}}$-module projectif. De même, il suit de la proposition 4.3.16 que AeA est aussi stratifiant. Il s'ensuit qu'on a un isomorphisme de A-A-bimodules $\mathrm{Ae} \otimes_{\mathrm{eAe}} \mathrm{eA} \simeq \mathrm{AeA}$. Par conséquent, les hypothèses de la proposition 5.4.4 sont satisfaites. Or, nous avons cette décomposition en tant que $\mathrm{eAe^{op}}$-modules

$$\mathrm{eA} \simeq \mathrm{eAe} \oplus \mathrm{eAe}'$$

Puisque AeA est un idéal puits alors on a $\mathrm{eA} \simeq \mathrm{eAe}$. En remplaçant eA et $\mathrm{A}/<\mathrm{e}>$ par leurs valeurs respectives dans la paire de torsion $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ dans 5.4.4 alors nous obtenons

$$\mathcal{T}_1 = \{\mathrm{Me} \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}, \quad \mathcal{F}_1 = \{\mathrm{Me}' \mid \mathrm{M} \in \mathrm{modA}\}.$$

Puisque AeA est un idéal puits alors le théorème 4.3.18 donne l'existence de la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Me} \to \mathrm{M} \to \mathrm{Me}' \to 0.$$

2. La preuve de 2 est analogue à celle de 1 .C'est ce qui achève la preuve.

□

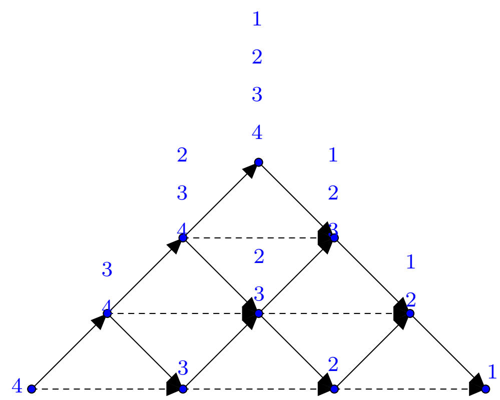
Exemple 5.4.6. Considérons l'algèbre A donnée par le carquois

$$\mathrm{Q} = \; 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4$$

Les projectifs et injectifs indécomposables de A sont représentés ci-dessous

$$\mathrm{P}_1 = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \; ; \; \mathrm{P}_2 = \begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix} \; ; \; \mathrm{P}_3 = \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \; ; \; \mathrm{P}_4 = \; 4 \; ; \; \mathrm{I}_1 = \; 1 \; ; \; \mathrm{I}_2 = \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \; ; \; \mathrm{I}_3 = \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \; ; \; \mathrm{I}_4 = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de A est représenté ci-dessous :



Cette algèbre contient quatre idéaux puits engendrés par les idempotents non triviaux respectifs : $e_4; e_3 + e_4; e_2 + e_3 + e_4$ et $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

Cas où $e = e_4$:

Puisque AeA est un idéal puits alors on a

$$\mathcal{T}_1 = \mathrm{add}\{4\} \text{ et } \mathcal{F}_1 = \mathrm{add}\{1, 2, 3\ \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}2\\3\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\ \}.$$

Cas où $e = e_3 + e_4$:

Puisque AeA est un idéal puits alors on a

$$\mathcal{T}_1 = \mathrm{add}\{3, 4,\ \begin{matrix}3\\4\end{matrix}\ \} \text{ et } \mathcal{F}_1 = \mathrm{add}\{1, 2,\ \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\ \}.$$

Cas où $e = e_2 + e_3 + e_4$:

Puisque AeA est un idéal puits alors on a

$$\mathcal{T}_1 = \mathrm{add}\{2, 3, 4,\ \begin{matrix}3\\4\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}2\\3\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\ \} \text{ et } \mathcal{F}_1 = \mathrm{add}\{1\}.$$

Maintenant intéressons-nous aux idéaux sources. L'algèbre A possède quatre idéaux sources engendrés par les idempotents non triviaux respectifs :

$$e_1; e_1 + e_2; e_1 + e_2 + e_3 \text{ et } e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

Cas où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1$:

Puisque AeA est un idéal source alors on a

$$\mathcal{T}_2 = \mathrm{add}\{2, 3, 4, \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\} \;\text{ et }\; \mathcal{F}_2 = \mathrm{add}\{1\}.$$

Cas où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$:

Puisque AeA est un idéal source alors on a

$$\mathcal{T}_2 = \mathrm{add}\{3, 4, \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\} \;\text{ et }\; \mathcal{F}_2 = \mathrm{add}\{1, 2, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\}.$$

Cas où $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$:

Puisque AeA est un idéal source alors on a

$$\mathcal{T}_2 = \mathrm{add}\{4\} \;\text{ et }\; \mathcal{F}_2 = \mathrm{add}\{1, 3, 2, \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\}.$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

La thèse englobe deux sujets liés à la théorie des représentations en l'occurrence les recollements et la théorie de l'inclinaison. En fait, l'objectif principal de nos recherches reposait sur le fait de pouvoir établir le recollement sur les modules de Cohen-Macaulay autrement dit la restriction aux catégories de modules du recollement défini par Cline, Parshall et Scott [22](voir ci-dessous).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}A/<e> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}A \arrow[l, bend right, "-\otimes_{A} A/<e>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{A}(A/<e>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{A}(eA,-)"] & \mathrm{mod}eAe. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{eAe} eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"] \end{tikzcd}$$

En poursuivant toujours avec les modules de Cohen-Macaulay nous avons pu établir le recollement sur cette catégorie grâce aux K-algèbres d'Iwanaga Gorenstein et les nouvelles notions que nous avons définies à savoir les idéaux source et puits. On pourrait se poser les questions suivantes :

Est-ce qu'il serait possible d'obtenir ce diagramme sous d'autres hypothèses ?

Que se passe t-il si nous remplaçons la K-algèbre de Gorenstein par un ordre de Gorenstein ? Ce sont des questions auxquelles des recherches pourront être orientées. Il est vrai qu'il ne sera pas facile de répondre à ces interrogations par l'affirmative ou le contraire. Pour la préservation de l'inclinaison nous pouvons noter qu'elle a été obtenue sous certaines hypothèses de façon totale par certains foncteurs ou partielle par d'autres. Des résultats probants ont été constatés, en effet nous avons prouvé que trois parmi les six foncteurs préservent l'inclinaison sous certaines conditions. Les trois restants sont inclinants partiels au regard de la raison évoquée plus haut qui empêche la troisième condition de l'inclinaison d'être satisfaite (voir définition 5.1.1). Ce résultat obtenu sur la préservation de l'inclinaison nous amène à énoncer cette conjecture.

Conjecture 5.4.7. Soient A une K-algèbre de dimension finie et e un idempotent de A tels que AeA soit un idéal source. Considérons le recollement défini par Cline, Parshall et Scott.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mod}\ A/<e> \arrow[r, "\mathsf{inc}"] & \mathrm{mod}\ A \arrow[l, bend right, "-\otimes_A A/<e>"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_A(A/<e>,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(eA,-)"] & \mathrm{mod}\ eAe. \arrow[l, bend right, "-\otimes_{eAe} eA"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"]
\end{tikzcd}$$

Supposons que $\mathbf{L_A}$ est un A-module inclinant généralisé, $\mathbf{M_{A/<e>}}$ est un $A/<e>$-module inclinant généralisé et $\mathbf{N_{eAe}}$ un eAe-module inclinant généralisé. Alors les résultats suivants sont vérifiés :

1. **Le** est un eAe-module inclinant généralisé.
2. Si eA est un $(eAe)^{op}$–module projectif alors $\mathbf{L \otimes_A A/ < e >}$ est un $A/<e>$-module inclinant généralisé.
3. Posons $\mathbf{L} = \oplus_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{L_i}$ avec les $\mathbf{L_i}$ deux à deux non-isomorphes tel que la K-algèbre $A/<e>$ admette m simples ($m < n$). Si $\mathbf{Hom_A(A/ < e >, L)}$ possède m facteurs directs deux à deux non-isomorphes tel que le foncteur $\mathbf{Hom_A(A/ < e >, -)}$ préserve les A-modules projectifs alors $\mathbf{Hom_A(A/ < e >, L)}$ est un $A/<e>$-module inclinant généralisé.
4. $\mathbf{M_A}$ est un A-module inclinant généralisé partiel.
5. Posons $\mathbf{N} = \oplus_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{t}} \mathbf{N_i}$ avec les $\mathbf{N_i}$ deux à deux non-isomorphes. Si les $\mathbf{N_i}$ sont des A-modules de dimension projective au plus n alors $\mathbf{Hom_{eAe}(Ae, N)}$ est un A-module inclinant généralisé partiel.

6. Si eA est un $(eAe)^{op}$-module projectif alors $\mathbf{N} \otimes_{\mathbf{eAe}} \mathbf{eA}$ est un A-module inclinant généralisé partiel.

La dernière étape consiste en l'étude des paires de torsion que nous avons trouvées sur les catégories de modules à l'aide des foncteurs qui composent le recollement représenté ci-dessus. Dans cette thèse, nous venons de dévoiler un pan des applications qu'on peut faire avec le recollement défini par Cline, Parshall et Scott. Nous sommes intimement convaincus que ce que nous avons fait est juste la partie visible de l'iceberg. Dans le même sillage on peut indiquer quelques pistes de recherches :

1. Préservation de la τ-inclinaison et la support τ-inclinaison.
2. Pourrions-nous obtenir ce recollement en allégeant les conditions ?
3. Est-il possible d'obtenir le théorème 5.3.1 avec des modules co-inclinants ?
4. Est-il possible d'obtenir la proposition 5.4.4 avec des paires de torsion sur les catégories triangulées ?

Notons qu'on ne peut pas conclure sans faire cette petite remarque. Force est de reconnaître que n'eût été les notions d'idéaux source et puits que nous avons introduites, on aboutirait pas à de tels résultats.

Bibliographie

[1] T. Adachi, O. Iyama, and I. Reiten. τ-tilting theory. *Compos. Math.*, 150(3) :415–452, 2014.

[2] L. Angeleri, H., S. Koenig, and Q. Liu. On the uniqueness of stratifications of derived module categories. *J. Algebra*, 359 :120–137, 2012.

[3] M. Artin, A. Grothendieck, and J. L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4),Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.

[4] I. Assem. *Algébres et Modules*. Les Presses de l'Université d'Ottawa, 1995.

[5] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.

[6] M. Auslander, I. Platzeck, M., and I. Reiten. Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 250 :1–46, 1979.

[7] M. Auslander, M. I. Platzeck, and G. Todorov. Homological theory of idempotent ideals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 332(2) :667–692, 1992.

[8] M. Auslander and I. Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. *Adv. Math.*, 86(1) :111–152, 1991.

[9] M. Auslander and I. Reiten. Cohen-Macaulay and Gorenstein Artin algebras. In *Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (Bielefeld, 1991)*, volume 95 of *Progr. Math.*, pages 221–245. Birkhäuser, Basel, 1991.

[10] M. Auslander, I. Reiten, and O. Smalø, S. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Corrected reprint of the 1995 original.

[11] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[12] A. Beligiannis. Cohen-Macaulay modules, (co)torsion pairs and virtually Gorenstein algebras. *J. Algebra*, 288(1) :137–211, 2005.

[13] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, and V. A. Ponomarev. Coxeter functors, and Gabriel's theorem. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(2(170)) :19–33, 1973.

[14] K. Bongartz. Tilted algebras. In *Representations of algebras (Puebla, 1980)*, volume 903 of *Lecture Notes in Math.*, pages 26–38. Springer, Berlin-New York, 1981.

[15] S. Brenner and M.C. R. Butler. Generalizations of the Bernstein-Gel'fand-Ponomarev reflection functors. In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, volume 832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 103–169. Springer, Berlin-New York, 1980.

[16] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Adv. Math.*, 204(2) :572–618, 2006.

[17] B. Buan, A., J. Marsh, R., and I. Reiten. Cluster-tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(1) :323–332, 2007.

[18] R.-O. Buchweitz. Maximal Cohen-Macaulay Modules and Tate - Cohomology over Gorenstein Rings. 1986.

[19] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[20] X. W. Chen. Singularity categories, Schur functors and triangular matrix rings. *Algebr. Represent. Theory*, 12(2-5) :181–191, 2009.

[21] X. W. Chen. Gorenstein Homological of Artin Algebras. *USTC*, 2010.

[22] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Algebraic stratification in representation categories. *J. Algebra*, 117(2) :504–521, 1988.

[23] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine Angew. Math.*, 391 :85–99, 1988.

[24] E. Dickson, S. A torsion theory for Abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 121 :223–235, 1966.

[25] V. Dlab. Quasi-hereditary algebras revisited. *An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat.*, 4(2) :43–54, 1996. Representation theory of groups, algebras, and orders (Constanţa, 1995).

[26] Edgar E. Enochs and Overtoun M. G. Jenda. Gorenstein injective and projective modules. *Math. Z.*, 220(4) :611–633, 1995.

[27] Edgar E. Enochs and Overtoun M. G. Jenda. *Relative homological algebra*, volume 30 of *De Gruyter Expositions in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.

[28] H-B. Foxby. Isomorphims between Complexes with Applications to the Homological Theory of Modules. *American Mathematical Society*, pages 5–19, 1977.

[29] V. Franjou and T. Pirashvili. Comparison of abelian categories recollements. *Doc. Math.*, 9 :41–56, 2004.

[30] W. Geigle and H. Lenzing. Perpendicular categories with applications to representations and sheaves. *J. Algebra*, 144(2) :273–343, 1991.

[31] S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra.* Springer-Verlag, Berlin, 1996. Translated from the 1988 Russian original.

[32] S. Gross and R. Schaefer. Derived Categories. 2009.

[33] D. Happel and M. Ringel, C. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2) :399–443, 1982.

[34] R. Hartshorne. *Residues and duality.* Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[35] H. Holm. Gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra*, 189(1-3) :167–193, 2004.

[36] T. Holm. Derived categories, derived equivalences and representation theory. In *Proceedings of the Summer School on Representat Theory of Algebras, Finite and Reductive Groups (Cluj-Napoca, 1997)*, Babeş-Bolyai Univ. Fac. Math. Comput. Sci. Res. Semin., pages 33–66. "Babeş-Bolyai" Univ., Cluj-Napoca, 1998.

[37] Y. Iwanaga and J. Miyachi. Modules of the highest homological dimension over a Gorenstein ring. In *Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras (Seattle, WA, 1997)*, volume 229 of *Contemp. Math.*, pages 193–199. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[38] M. Kalck. *Relative Singularity Categories.* 2013. Thesis (Ph.D.)–University of Bonn in Germany, Departement of Pure Mathematics.

[39] B. Keller and I. Reiten. Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau. *Adv. Math.*, 211(1) :123–151, 2007.

[40] S. Koenig and H. Nagase. Hochschild cohomology and stratifying ideals. *J. Pure Appl. Algebra*, 213(5) :886–891, 2009.

[41] Q. Liu and D. Yang. Stratifications of algebras with two simple modules. *Forum Math.*, 28(1) :175–188, 2016.

[42] X.-H. Luo and P. Zhang. Monic representations and Gorenstein-projective modules. *Pacific J. Math.*, 264(1) :163–194, 2013.

[43] X. Ma and Z. Huang. Torsion pairs in recollements of abelian categories. *Front. Math. China*, 13(4) :875–892, 2018.

[44] D. Milicić. Derived categories. Progr. Math.

[45] J.S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton University Press 1980, 2013.

[46] J.-I. Miyachi. Localization of triangulated categories and derived categories. *J. Algebra*, 141(2) :463–483, 1991.

[47] J.-I. Miyachi. Recollement and idempotent ideals. *Tsukuba J. Math.*, 16(2) :545–550, 1992.

[48] J.-I. Miyachi. Derived categories with applications to representations of algebras. *J. Algebra*, 2011.

[49] D. Murfet. Derived functors. 2006.

[50] S. Pan. Recollements and Gorenstein algebras. *Int. J. Algebra*, 7(17-20) :829–832, 2013.

[51] C. Paquette. *Conjectures homologiques, categories stables et representations de carquois infinis*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010. Thesis (Ph.D.)–Universite de Sherbrooke (Canada).

[52] B. J. Parshall. Finite-dimensional algebras and algebraic groups. In *Classical groups and related topics (Beijing, 1987)*, volume 82 of *Contemp. Math.*, pages 97–114. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[53] D. Pauksztello. *Homological Properties of Differential Graded Algebras*. 2008. Thesis (Ph.D.)–University of Leeds, Departement of Pure Mathematics.

[54] C. Psaroudakis. *Representation Dimension, Cohen-Macaulay Modules and Triangulated Categories*. 2013. Thesis (Ph.D.)–University of Ioannina (Greece).

[55] C. Psaroudakis. Homological theory of recollements of abelian categories. *J. Algebra*, 398 :63–110, 2014.

[56] C. Psaroudakis and J. Vitória. Recollements of module categories. *Appl. Categ. Structures*, 22(4) :579–593, 2014.

[57] R. Schiffler. *Quiver representations*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, Cham, 2014.

[58] J.-L. Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, (239) :xii+253 pp. (1997), 1996. With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.

[59] R. Wei and Z. Liu. Gorenstein homological dimensions for triangulated categories. *J. Algebra*, 410 :258–276, 2014.

[60] C. Xi. On the Finistic Dimension Conjecture. 2008.

[61] D. Yang. Algebraic stratifications of derived module categories and derived simple algebras. In *Proceedings of the 44th Symposium on Ring Theory and Representation Theory*, pages 256–261. Symp. Ring Theory Represent. Theory Organ. Comm., Nagoya, 2012.

[62] Y. Yoshino. *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, volume 146 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[63] P. Zhang. A Brief Introduction to Gorenstein Projective Modules. 2002.

[64] P. Zhang. Monomorphism categories, cotilting theory, and Gorenstein-projective modules. *J. Algebra*, 339 :181–202, 2011.

[65] P. Zhang. Gorenstein-projective modules and symmetric recollements. *J. Algebra*, 388 :65–80, 2013.

[66] Y. Zhou and B. Zhu. Mutation of Torsion Pairs in Triangulated Categories and its Geometric Realization. *Algebr. Represent. Theory*, 21(4) :817–832, 2018.

[67] A. Zimmermann. *Representation theory*, volume 19 of *Algebra and Applications*. Springer, Cham, 2014. A homological algebra point of view.